TEMA 8

Integrales impropias

Contenidos:

1. Introducción.

En capítulos anteriores se ha estudiado la integral de Riemman de una función f acotada y definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ (con a y b números reales). En esta sección intentaremos generalizar este concepto de integral para funciones que no verifican alguna de las hipótesis anteriormente citadas, esto es:

1) La integral de una función no acotada, definida en un intervalo acotado, como por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{en } (0,1]$$

2) La integral de una función acotada, definida en un intervalo no acotado, como por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{en } [1,+\infty)$$

3) La integral de una función acotada definida en un intervalo no acotado, como por ejemplo:

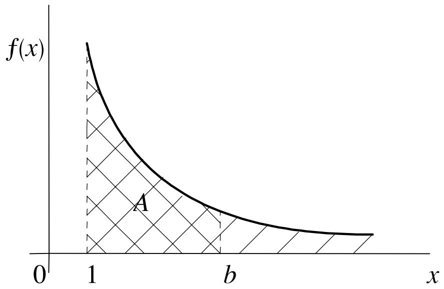
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{en } (0,+\infty)$$

Este caso se puede analizar a partir de los dos anteriores:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

2. Integral de una función acotada en un intervalo no acotado.

Supongamos que nos interesa conocer si $f(x) = 1/x^2$ es integrable en el intervalo $[1,+\infty)$ (es decir, si es finita el área del conjunto A).



Sea b un número real mayor que 1, entonces como $F(x) = -1/x$ es una primitiva de f se verifica:

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^b = 1 - \frac{1}{b}$$

Puesto que $[1,+\infty)$ puede entenderse como un conjunto que es el límite de conjuntos de la forma $[1,b)$ cuando b tiende a infinito, parece lógico definir la integral de $f(x) = 1/x^2$ en $[1,+\infty)$ como el límite

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1 = \text{área}(A)$$

ya que podemos conocer la integral de $f(x)$ en $[1,b)$ al ser una integral de Riemman. Así pues, la integral de la función acotada $f(x) = 1/x^2$ en el intervalo no acotado $[1,+\infty)$ vale 1.

En general, se define la integral de una función acotada en un intervalo no acotado de la siguiente forma.

Definición 1. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a,+\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Si para todo b la función es integrable en $[a,b]$ y es finito el límite*

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

se dice que existe la integral impropia de f en $[a,+\infty)$ y es convergente.

El valor del límite se denota por $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

El significado geométrico de la integral impropia es el del área del conjunto ordenado de f, cuando este conjunto no está acotado, como se indica en la figura anterior.

Análogamente, se define la integral de una función f acotada en el intervalo $(-\infty,b]$, como el límite, si existe y es finito, de $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *que se denotará por* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Del mismo modo, la integral de una función f *acotada en el intervalo* $(-\infty,+\infty)$*, que se denotará por* $\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *, se define como la suma:*

$$\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

sin que influya la elección de c *.*

Esto debe entenderse del siguiente modo: Si convergen las dos integrales impropias del segundo miembro, entonces converge (existe) la integral impropia del primer miembro y es igual a la suma de dichas dos integrales. Ahora bien, cuando una de las integrales del segundo miembro no existe, tampoco existe la integral de f en $(-\infty,+\infty)$.

Observación. Si existe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ entonces su valor coincide con

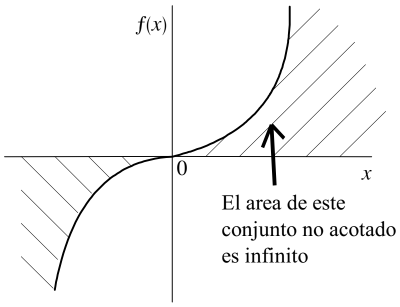
$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \ ,$$

pero la implicación recíproca no es cierta.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x^3$ en $(-\infty,+\infty)$. Para cualquier b

$$\int_{-b}^{b} x^3\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-b}^{b} = \frac{b^4}{4} - \frac{b^4}{4} = 0 \,,$$

por lo que $\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} x^3\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} 0 = 0$.



Sin embargo $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,\mathrm{d}x$ no es convergente de (véase la figura) considerando por ejemplo $c = 0$, ya que

$$\int_{-\infty}^{0} x^3\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x^3\,\mathrm{d}x = -\infty$$
$$\int_{0}^{+\infty} x^3\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x^3\,\mathrm{d}x = +\infty$$

Proposición 1. **(***Condiciones para la existencia de la integral de una función acotada sobre un intervalo no acotado)*

a) Condición necesaria. Si existe (converge) $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$*, entonces* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

b) Condición necesaria y suficiente. Si f *es una función acotada definida en* $[a,+\infty)$ *e integrable en* $[a,b]$ *para todo* $b \ge a$*, con función primitiva* F *tal que* $\lim_{b\to\infty} F(b) = k \quad k \in \mathbb{R}$*, entonces* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *es convergente y* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = k - F(a)$.

Así pues, la existencia de un número real k tal que $k = \lim_{b\to\infty} F(b)$ es una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la integral impropia de una función f que admite primitiva F.

En efecto, por el segundo teorema fundamental del cálculo integral se verifica que, para todo $b \geq a$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Como por definición:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b) - F(a)\right],$$

será suficiente entonces que $\lim_{b\to+\infty} F(b) = k$ para que la integral de f en $[a,+\infty]$ sea convergente y $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = k - F(a)$.

La condición también es necesaria ya que si $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente y F es la primitiva de f entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b) - F(a)\right] = L \quad L \in \mathbb{R}$$

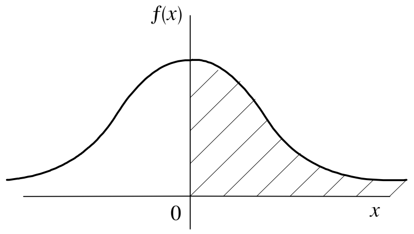
Se verifica pues: $\lim_{b\to+\infty} F(b) = L + F(a) = k,\ \ k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2. Estudiar si es convergente la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

y en caso afirmativo calcular su valor.

Solución: La gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es:



Obsérvese que f es una función continua y acotada en $[0,+\infty)$; en concreto

$$|f(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \geq 0$$

por lo tanto f es integrable en todo intervalo de la forma $[0,b]$ con $b \geq 0$.

Además, la primitiva de $f(x) = 1/1+x^2$ es $F(x) = \operatorname{arctg} x$, para la cual se verifica:

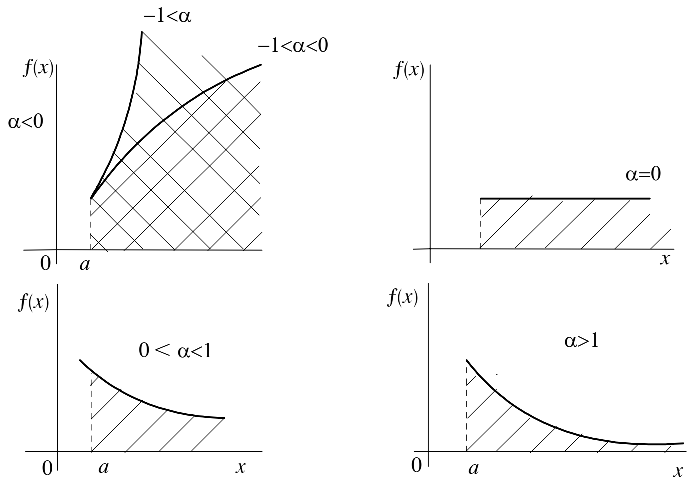
$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2} < \infty$$

Por lo que teniendo en cuenta el resultado precedente se tiene:

$$\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - F(0) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 3. Estudiar para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es convergente la integral de la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[a,+\infty)$ con $a > 0$.

Solución: La gráfica de f según los distintos valores de α es del tipo:



Obsérvese que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^{\alpha}$ es continua y acotada en todo el intervalo de la forma $[a,b]$, con $b > a$ $b \in \mathbb{R}$, y por tanto, integrable sobre dichos intervalos.
La primitiva de f es.

$$F(x) = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \quad \text{si } \alpha \neq 1$$
$$F(x) = \ln|x| \quad \text{si } \alpha = 1$$

En cada uno de estos casos se tiene:

(*) Para $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

(**) Para $\alpha = 1$:

$$\lim_{b\to\infty} F(b) = \lim_{b\to\infty} \ln|b| = \infty$$

Por tanto, de acuerdo con el criterio anterior:

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha \le 1 \end{cases}$$

y para $\alpha \le 1$ la integral, es divergente. El resultado obtenido podía intuirse a la vista de las gráficas de $f(x) = 1/x^{\alpha}$ según el valor de α, ya que la integral de f en $[a,+\infty)$ es el área del conjunto ordenado.

Ejemplo 4. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

Solución: La integral es divergente ya que

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \left(\frac{x^3}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left\{\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^b \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x\right\} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left\{\ln(b) - \ln(1) + \frac{b^{-3}}{-3} + \frac{1}{3}\right\} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + \ln(b) - \frac{1}{3b^3}\right) = +\infty .$$

Proposición 2. (*Criterios de comparación)*

Si f es integrable en el intervalo $[a,b]$ para todo $b \ge a$, g es una función tal que $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,+\infty)$, y la integral de g en $[a,+\infty)$ es convergente, entonces la integral de f en $[a,+\infty)$ es convergente y $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Además, si la integral de f no es convergente en $[a,+\infty)$, entonces la integral g no es convergente en $[a,+\infty)$.

Observación. Como sabemos que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ es convergente para $\alpha > 1$ y no convergente para $\alpha \le 1$, por el criterio de comparación podemos dar una condición suficiente de convergencia para la integral de $f(x)$ en $[a,+\infty)$.

- Si $f(x)$ es una función definida y acotada en el intervalo $[a,+\infty)$ y para todo $x \in [a,+\infty)$

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha > 1$$

 la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente.

- Si $f(x)$ es una función definida y acotada en el intervalo $[a,+\infty)$ y para todo $x \in [a,+\infty)$

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha \le 1$$

 la integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ no es convergente.

Para los intervalos $(-\infty,b]$ y $(-\infty,+\infty)$ la extensión es inmediata.

Ejemplo 5. La integral $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1+e^x\right)}$ es convergente ya que para todo $x \ge 2$

$$0 \le \frac{1}{x^2\left(1+e^x\right)} < \frac{1}{x^2}\,, \text{ siendo } \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \text{ convergente.}$$

Ejemplo 6. La integral $\int_2^{+\infty} \frac{x+2}{2\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x$ es divergente pues, para todo $x \ge 1$

$$\frac{x+2}{2\sqrt[3]{x^5}} \ge \frac{x}{2x^{5/3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{2/3}} \ge 0\,, \text{ siendo } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}} \text{ divergente.}$$

Observación. La condición de que $f(x)$ y $g(x)$ sean mayores o iguales que cero es fundamental, pues si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se pueden comparar pero no se mantienen mayores que cero la afirmación anterior no es cierta.

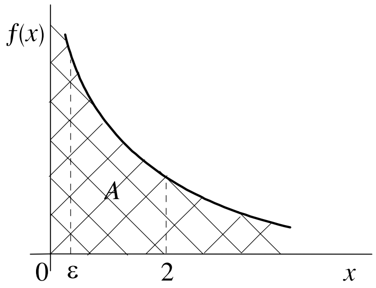
Ejemplo 7. Si $f(x) = -1$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$ es cierto que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \ge 1$. Pero aunque $\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente, esto no implica que lo sea la integral de $f(x)$ en $[1,+\infty)$; de hecho se tiene $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty$.

Para evitar este problema, en algunos casos puede ser útil considerar el valor absoluto de la función a integrar: si la integral del valor absoluto es convergente, también lo es la integral de la función inicial.

Ejemplo 8. Sea $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$. Como $0 \le \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}$ y $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ es convergente, tendremos que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| \mathrm{d}x$ es convergente, de donde se deduce que $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,\mathrm{d}x$ es también convergente.

3. Integral de una función no acotada en un intervalo acotado.

Supongamos que deseamos conocer si $f(x) = 1/\sqrt{x}$ es integrable en el intervalo $(0,2]$. Si existe la integral, su valor será el área del conjunto A.



Sea ε un número real mayor que 0, la función $f(x) = 1/\sqrt{x}$ es continua en $[\varepsilon,2]$ y por lo tanto, integrable en dicho intervalo. En concreto se tiene:

$$\int_{\varepsilon}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{2} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}$$

Obsérvese que $(0,2]$ puede interpretarse como el límite de los intervalos de la forma $[\varepsilon,2]$ cuando $\varepsilon \to 0^+$, por tanto de nuevo parece razonable definir la integral de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ en $(0,2]$ como el límite:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{2}$$

Así pues, el área del conjunto no acotado A es igual a $2\sqrt{2}$.

En general, la integral de una función no acotada en un intervalo acotado se define de la siguiente forma.

Definición 2. *Sea f una función definida en $(a,b]$ y supóngase que f es integrable en $[a+\varepsilon,b]$ para todo $\varepsilon > 0$. Si existe y es finito el límite*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

se dice que existe la integral impropia de f en $(a,b]$ y es convergente.

El valor del límite se denotará por $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Geométricamente, esta integral es el área del conjunto ordenado de f, que es no acotado como muestra la figura anterior.

La integral de una función f no acotada en el intervalo $[a,b)$ se define, de forma análoga, como el límite (cuando existe y es finito)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

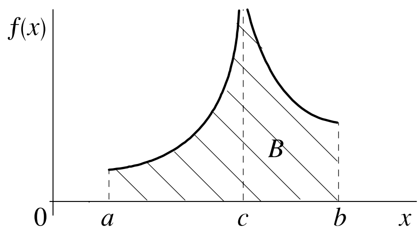
y se denota por $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si la función f *no está acotada en* $c \in (a,b)$, *entonces se define*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

De nuevo, en este caso, la integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente si lo son las dos integrales impropias que aparecen en el segundo miembro. En cuanto una de estas últimas integrales no exista tampoco existirá, la integral del primer miembro.

Geométricamente, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ representa el área del conjunto B.



Se indica a continuación una condición para la existencia de la integral de una función no acotada definida en el intervalo $(a,b]$ (la extensión a los demás tipos de intervalos es directa).

Teorema 1.

Sea f *una función definida en* $(a,b]$ *que tiene función primitiva* F. *Entonces si*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(a+\varepsilon) = k$$

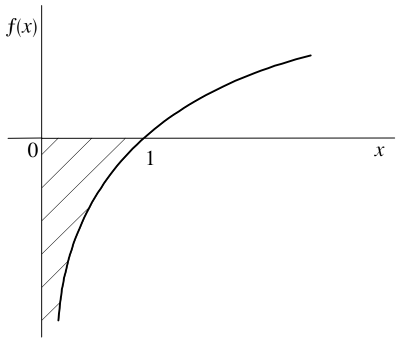
se verifica que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *es convergente y además*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - k$$

Por tanto, que exista $\lim_{\varepsilon \to 0^+} F(a+\varepsilon) = k$ y sea finito es una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la integral impropia de una función f no acotada en $(a,b]$ que admite primitiva F.

Ejemplo 9. Estudiar la convergencia de la integral de $f(x) = \ln x$ en $(0,1]$ y en caso afirmativo calcular su valor.

Solución: La gráfica de $f(x) = \ln x$ es



Es claro que f es una función continua y acotada en $[\varepsilon,1]$ para todo $\varepsilon > 0$. Así pues, f es integrable en $[\varepsilon,1]$, y su primitiva es

$$F(x) = x\ln x - x$$

ya que $F'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} - 1 = \ln x = f(x)$.

Además para la primitiva se verifica

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(\ln\varepsilon - 1) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon - 1}{1/\varepsilon}$$

y aplicando L`Hôpital se obtiene

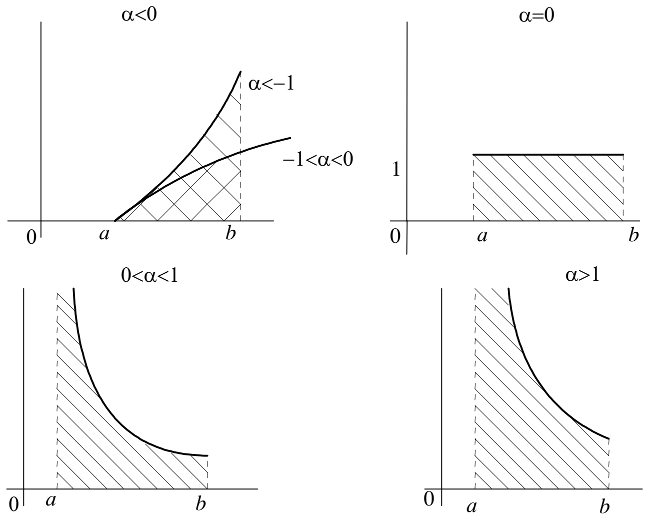
$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\varepsilon}{1/\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 0$$

Teniendo en cuenta el teorema anterior resulta:

$$\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = F(1) - 0 = 1\ln 1 - 1 - 0 = -1$$

Ejemplo 10. Estudiar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es convergente la integral de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ en el intervalo $(a,b]$.

Solución La gráfica de f según los valores de α es del tipo:



Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ es continua y acotada en los intervalos de la forma $[a+\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$ y por consiguiente integrable sobre dichos intervalos. La primitiva de f es:

$$F(x) = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{si} \quad \alpha \neq 1$$

$$F(x) = \ln|x-a| \quad \text{si} \quad \alpha = 1$$

Para cada uno de estos casos se verifica

- Si $\alpha \neq 1$. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(a+\varepsilon-a)^{1-\alpha}}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < 1 \\ \infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}$
- Si $\alpha = 1$. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} F(a+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|a+\varepsilon-a| = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = -\infty$

Así pues, de acuerdo con el criterio:

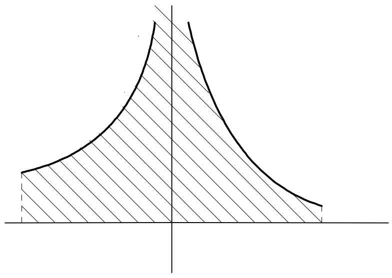
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si} \quad \alpha < 1 \\ -\infty & \text{si} \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

y para todo $\alpha \geq 1$, la integral de $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ no existe. De nuevo, en este caso, a la vista de la gráfica de f según los distintos valores de α, el resultado es fácilmente interpretable.

Ejemplo 11. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$.

Solución: La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ está definida en $[-2,0) \cup (0,3]$ y no es acotada. Descomponiendo la integral de acuerdo con la definición indicada se tiene:

$$\int_{-2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{0}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$



La integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ no existe ya que es del tipo $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$ con $a = 0,\ b = 3$ y $\alpha = 3 > 1$.

Por tanto tampoco converge la integral que se pide en el ejemplo.

Proposición 3. (*Criterios de comparación*)

Si la función f es integrable en $[a+\varepsilon, b]$ para todo $\varepsilon > 0$ y g es una función tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a,b]$, se tiene que:

1) *Si la integral de g es convergente, entonces la integral de f es convergente y*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

2) *Si la integral de f es no convergente en $(a,b]$, la integral de g no es convergente en $(a,b]$.*

A partir de la integral de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$, convergente para $\alpha < 1$ y no convergente para $\alpha \geq 1$, podemos enunciar la siguiente <u>condición suficiente de convergencia:</u>

- Sea $f(x)$ una función definida en $(a,b]$ tal que para todo $x \in (a,b]$ se verifica $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ con $\alpha < 1$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente.
- Si por el contrario para todo $x \in (a,b]$ se verifica que $0 \leq \dfrac{1}{(x-a)^\alpha} \leq f(x)$ con $\alpha \geq 1$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es no convergente.

Ejemplo 12. Sea $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)x^2}$ definida en $\left(0,1/2\right]$. La integral de esta función no es convergente pues $0\le\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1}{(1-x)}\cdot\dfrac{1}{x^2}$ para todo $x\in\left(0,1/2\right]$.

Ejemplo 13. Sea $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+3x^3}}$ definida en $\left(0,2\right]$. La integral de esta función es convergente pues $0\le\dfrac{2}{\sqrt{x+3x^3}}\le\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ y $\displaystyle\int_0^2\frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

Ejemplo 14. La integral $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ es convergente pues para todo $x\in\left(0,1\right]$

$$0\le\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}},\ \text{siendo}\ \int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\ \text{es convergente}$$

por lo que

$$\int_0^1\left|\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|\mathrm{d}x$$

es convergente y, por tanto, I es convergente también.

4. Integrales Eulerianas.

Vamos a estudiar dos ejemplos de integrales impropias que dependen de uno o dos parámetros; respectivamente, son las integrales Beta y Gamma también llamadas integrales Eulerianas.

Definición 3. *Se define la función Beta de parámetros p y q.como la integral*

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\,.$$

Por lo tanto tenemos una función $f(x)=\dfrac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}=\dfrac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}$ definida, en general, en $(0,1)$, pues para $x=0$ el denominador de $f(x)=\dfrac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}$ se hace cero si $p<1$, y para $x=1$ el denominador de $f(x)=\dfrac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}$ se hace cero si $q<1$.

Proposición 4. (*Existencia)*

Si $p>0$ *y* $q>0$*, la integral* $\beta(p,q)$ *es convergente.*

Demostración. Vamos a estudiar los valores de p y q para los cuales esta integral es convergente. El estudio lo vamos a hacer por comparación y, por lo tanto, obtendremos una condición suficiente de existencia o convergencia. En primer lugar, consideramos:

$$\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\ \mathrm{d}x=\int_0^{1/2} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\ \mathrm{d}x+\int_{1/2}^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\ \mathrm{d}x$$

Para estudiar la convergencia en $(0,1/2]$ observemos que

$$0\le\frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\le\frac{1}{(x-0)^{1-p}}\ \text{para todo}\ x\in(0,1/2].$$

Por tanto para $\alpha=1-p<1$ ($p>0$) y cualquier q, la integral de f en $(0,1/2]$ es convergente.

Para estudiar la convergencia en $[1/2,1)$, como se verifica

$$0\le\frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\le\frac{1}{(1-x)^{1-q}}\ \text{para todo}\ x\in[1/2,1)\,,$$

se deduce que para $\alpha=1-q>1$ la integral es convergente.

Así pues, como $\int_0^{1/2} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ es convergente para $p>0$ y para todo q y $\int_{1/2}^{1} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ es convergente para $q>0$ y para todo p, entonces $\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ es convergente para $p>0$ y $q>0$. □

Proposición 5. (*Propiedades*)

1) $\beta(p,q)=\beta(q,p)$

2) Para todo $q>0$, $\beta(1,q)=1/q$

3) Para todo $p>0$, $q>1$ *se verifica que* $\beta(p,q)=\dfrac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)$

4) Para todo $p>0$, $q>0$ *se verifica que* $\beta(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}t\cdot\operatorname{sen}^{2q-1}t\,\mathrm{d}t$

Demostración.

1) Para demostrar la igualdad basta hacer el cambio de variable $1-x=t$.

2) La comprobación es inmediata a partir de la definición de $\beta(1,q)$.

3) $$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left\{\begin{matrix}(1-x)^{q-1}=u & \mathrm{d}u=-(q-1)(1-x)^{q-2}\,\mathrm{d}x\\ x^{p-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v & v=\dfrac{x^p}{p}\end{matrix}\right\}=\frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}\Big|_0^1+\int_0^1\left(\frac{q-1}{p}\right)x^p(1-x)^{q-2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=0+\frac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1)$$

4) La demostración es directa efectuando el cambio de variable $x=\cos^2 t$. □

Ejemplo 15. Hallar $\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x$

Solución. $\int_0^1\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)^{1/2}\cdot x^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\beta\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ ya que $\begin{cases}p-1=-1/2\Rightarrow\ p=1/2\\ q-1=1/2\Rightarrow\ q=3/2\end{cases}$

Ejemplo 16. Hallar $\int_0^1\sqrt{2-x^5}\,\mathrm{d}x$

Solución. Efectuando el cambio de variables $\left\{\begin{matrix}x^5=t\ \Rightarrow\ 5x^4\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\ \to \mathrm{d}x=\dfrac{1}{5}t^{-4/5}\mathrm{d}t\\ x=0\to t=0\ ;\ x=1\to t=1\end{matrix}\right\}$, resulta

$$\int_0^1\sqrt{2-x^5}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-t}\,\frac{1}{5}t^{-4/5}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int_0^1(1-t)^{1/2}t^{-4/5}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\beta\left(\frac{1}{5},\frac{3}{2}\right)$$

Definición 4. *Se define la función Gamma de parámetro p como la integral*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Proposición 6. (*Existencia)*

Si $p > 0$*, la integral* $\Gamma(p)$ *es convergente.*

Demostración. Tenemos que estudiar la convergencia de la integral de $f(x) = e^{-x} \dfrac{1}{x^{1-p}}$ definida en el intervalo $(0,+\infty)$. Analizaremos los valores de p para los cuales la integral es convergente y para ello vamos a considerar $(0,+\infty) = (0,1] \cup [1,+\infty)$.

1) Sea $f(x) = e^{-x} \cdot x^{p-1}$, entonces como $0 \le \dfrac{1}{e^x \cdot x^{1-p}} \le \dfrac{1}{x^{1-p}}$ para todo $x \in (0,1]$, la integral de la función $f(x) = e^{-x} \cdot x^{p-1}$ en $(0,1]$ será convergente para $\alpha = 1 - p < 1$ y, por tanto, para todo $p > 0$.

2) Sea $f(x) = e^{-x} \cdot x^{p-1}$ una función definida en $[1,+\infty)$, siendo p un número real cualquiera, entonces se verifica que $\int_1^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x$ converge para todo $p \in \mathbb{R}$ ya que podemos comparar esta función con $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, cuya integral converge pues $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = 1$.

Así, como para todo $x \in [1,+\infty)$ se verifica que $0 \le x^{p-1} \cdot e^{-x} = \dfrac{x^{p-1}}{e^x} = \dfrac{x^{p+1}}{e^x} \cdot \dfrac{1}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$, entonces la integral $\int_1^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x$ es convergente para todo $p \in \mathbb{R}$.

Por tanto,

$$\int_1^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{p-1} \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

será convergente para $p > 0$. □

Proposición 2. (*Propiedades)*

1) $\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ *para* $p > 1$

3) Si p *es un número natural* $p \ge 2$*, se verifica que* $\Gamma(p) = (p-1)!$

4) $\beta(p,q) = \dfrac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Por las propiedades 2) y 3) y por estar tabulada la función $\Gamma(p)$, se desprende la importancia de la propiedad 4) que nos permite calcular con cierta facilidad el valor de algunas integrales impropias.

Ejemplo 17. Como $\beta(1/2,1/2) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \pi$ y $\beta(1/2,1/2) = \dfrac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)}$, obtenemos que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Ejemplo 18. Hallar $\int_0^{\infty} x^{4/3} e^{-x}\ \mathrm{d}x$

Solución. $\int_0^{\infty} x^{4/3} e^{-x}\ \mathrm{d}x = \Gamma(7/3) = \dfrac{4}{3}\Gamma\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\Gamma(1/3) = \dfrac{4}{9}\Gamma(1/3)$

Ejemplo 19. Hallar $\int_1^{\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x$

Solución. Efectuando el cambio de variable $\left\{\begin{array}{l} \ln x = t \Rightarrow x = e^t \\ \dfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = x\ \mathrm{d}t = e^t\ \mathrm{d}t \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{array}\right.$, se tiene que

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} t\cdot e^{-t}\ \mathrm{d}t = \Gamma(2) = 1\,! = 1$$

Ejercicios resueltos

1. Determinar la convergencia de las siguientes integrales impropias. Calcular el valor de la integral para los casos en los que la integral sea convergente.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{2x}dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{x}dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx$ (f) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x^4}$ (h) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ (i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$

Solución:

Para la resolución del ejercicio aplicaremos la definición de integral impropia como límite de una integral definida. Para ello necesitaremos conocer una primitiva de la función a integrar. Aunque en la mayor parte de los apartados la convergencia se puede analizar a partir de la propia definición, en algunos de ellos se realiza este estudio aplicando los criterios de comparación.

Para proceder a la integración será necesario detectar el "problema" que hace que la integral sea impropia, es decir, el punto x_0 tal que la función f a integrar verifica que $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\pm\infty$ (función no acotada en ningún entorno del punto x_0) o el extremo del intervalo de integración cuando es este el no acotado.

(a) Se trata de una integral impropia pues el intervalo de integración $[1,+\infty)$ no es acotado. El integrando cumple la condición necesaria de integración ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ y, por tanto, aplicamos la definición:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1$$

Vemos así que la integral es convergente y su valor es 1.

(b) De nuevo tenemos una integral impropia por no ser acotado el intervalo de integración. El integrando cumple la condición necesaria de integración ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$ y, por tanto, aplicamos la definición:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{b}^{0} e^{2x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_a^0\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{0}-\frac{1}{2}e^{2a}\right) = \frac{1}{2} - \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2a}\right) = \frac{1}{2}$$

La integral es convergente y su valor es 1/2.

(c) Se trata de una integral impropia pues el intervalo de integración $[1,+\infty)$ no es acotado. El integrando no cumple la condición necesaria de integración ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$ (utilizando L'Hôpital) y, por tanto, la integral es divergente.

También podríamos haber procedido utilizando criterios de comparación $x > 1 \Rightarrow \frac{e^x}{x} < \frac{1}{x}$ $\forall\, x\in[1,\,\infty)$ y como $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ es divergente, también lo será $\int_1^{+\infty}\frac{e^x}{x}dx$.

(d) Se trata de una integral impropia pues el intervalo de integración $(-\infty,+\infty)$ no es acotado. La función a integrar es acotada y se cumple la condición necesaria de integración ya que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+2x+2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+2x+2} = 0$$

y, por tanto, podemos descomponer la integral en suma de otras dos integrales donde sólo uno de los extremos del intervalo de integración sea no acotado para después aplicar la definición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c\frac{dx}{x^2+2x+2} + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b\frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c\frac{dx}{(x+1)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_a^c + \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_c^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}(c+1)-\operatorname{arctg}(a+1)\right)\Big|_a^c + \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}(c+1)\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2} = \pi$$

(e) Se trata de una integral impropia pues el intervalo de integración no es acotado. El integrando cumple la condición necesaria de integración ya que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2} = \frac{\lim\limits_{b\to+\infty}(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{\lim\limits_{b\to+\infty}(1+x^2)} = \frac{(\pi/2)^2}{\lim\limits_{b\to+\infty}(1+x^2)} = 0\,.$$

Descomponemos la integral $\int_0^{+\infty}\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx$ en suma de integrales $\int_0^{1}\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx$ y $\int_1^{+\infty}\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx$. La función a integrar es continua en el intervalo [0,1] y por tanto, basta estudiar la convergencia de $\int_1^{+\infty}\frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx$.

Utilizamos criterios de comparación.

Por ser la función $\operatorname{arctg} x$ una función creciente en el intervalo $[1,+\infty)$ y $\lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \pi/2$ tenemos

$$(\operatorname{arc\,tg} x)^2 < \left(\pi/2\right)^2 \Rightarrow \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2} < \frac{\left(\pi/2\right)^2}{1+x^2} \quad \forall\, x \in [1,+\infty)$$

Además se verifica que $1+x^2 > x^2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{x^2}$, luego $\dfrac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2} < \dfrac{\pi^2}{4}.\dfrac{1}{x^2}$ $\forall\, x \in [1,+\infty)$.

Así pues, como sabemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ es convergente y como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx < \frac{\pi^2}{4}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx,\ \forall x \in [1,+\infty)$, por criterios de comparación tenemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx$ también es convergente y concluimos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx$ lo es.

Calculamos el valor de la integral utilizando la definición.

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\left(\operatorname{arc\,tg} x\right)^3 \Big|_0^b \right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{24}$$

(f) Se trata de una integral impropia pues la función no es acotada en el intervalo de integración ya que $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Aplicamos la definición

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to0} \frac{(x)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_\varepsilon^4 = 4-0=4$$

y comprobamos que se trata de una integral convergente de valor 4.

(g) Se trata de una integral impropia pues la función no es acotada en el intervalo de integración ya que $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{1-x^4} = +\infty$. Vamos a aplicar criterios de comparación para estudiar si se trata de una integral convergente. Como

$$1+x \le 2, \quad 1+x^2 \le 2 \quad \forall x \in [0,1]$$

se deduce que $1-x^4 = (1-x)(1+x)\left(1+x^2\right) \le (1-x)\cdot 2\cdot 2 = 4(1-x),\ \ \forall x \in [0,1]$ y entonces, $\dfrac{1}{1-x^4} > 4\dfrac{1}{1-x},\ \ \forall x \in [0,1)$.

Por ser $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ divergente, también lo es $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$.

(h) Se trata de una integral impropia ya que la función no es acotada en el intervalo de integración. En este caso el punto problemático es $x=1$ por lo que descomponemos la integral en dos integrales impropias $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ y $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ pasando el punto problemático al extremo de cada una de ellas.

Aplicamos la definición

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(x-1)^{2/3}}{2/3}\right|_0^{1-\varepsilon} = -\frac{3}{2} \quad ; \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}$$

y vemos así que la integral es convergente y su valor es 0.

Nótese que haciendo el cambio de variable $t=x-1$, la función a integrar es una función simétrica de tipo $f(-t)=-f(t)$ con integral convergente y por eso la integral resulta ser nula.

(i) Se trata de una integral impropia debido a que el intervalo de integración no es acotado y la función integrando tampoco es acotada en dicho intervalo (punto problemático $x=1$). Procedemos a descomponer la integral en suma de integrales.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$$

La integral que estudiamos será convergente si cada una de estas lo es, mientras que será divergente si al menos una de ellas lo es. Vamos a ver que la segunda integral es divergente utilizando criterios de comparación. Como

$$1+x \le 3, \quad \forall x \in [1,2]$$

entonces tenemos $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} > \frac{1}{3(x-1)} \ge 0, \quad \forall x \in (1,2]$ y como $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ es divergente, utilizando el criterio de comparación también lo es $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1}$ y, por tanto, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ diverge.

2. Determinar la convergencia de las siguientes integrales impropias.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4} dx$ (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ (c) $\int_0^1 \frac{(1-x)^{1/2}}{\sqrt{x}} dx$

Solución:

(a) En este caso no podemos aplicar el criterio de comparación a la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^4}$ pues el signo de la misma cambia, intentamos, por tanto, utilizar criterios de comparación para el valor absoluto de esta función.

Así tenemos $0 \le \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^4} \le \dfrac{1}{x^4}$, $\forall x \in (0,+\infty)$ y como $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^4} dx$ es convergente, por el criterio de comparación $\int_0^{+\infty} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^4} dx$ también lo es, de lo que se deduce que la integral $\int_0^{+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^4} dx$ es convergente.

(b) Realizamos el cambio de variable $x=e^t$. Entonces tenemos que $dx=e^t dt$. Cambiamos también los límites de integración, así $x=1 \Rightarrow t=0$ y $x=+\infty \Rightarrow t=+\infty$.

La integral queda, por tanto de la siguiente forma

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} t e^t dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$$

Recordamos que la integral Euleriana $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ es convergente para todo $p>0$. En este caso, una vez hecho el cambio de variable, reconocemos la integral Euleriana $\Gamma(2)$ y es, por tanto, convergente.

Resolvemos la integral: $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \Gamma(2) = (2-1)\Gamma(1) = \Gamma(1) = 1$

(c) En primer lugar, nótese que $\int_0^1 \dfrac{(1-x)^{1/2}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{1/2} dx$. Recordamos que la integral Euleriana $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ es convergente si $p, q>0$. En el caso estudiado tenemos que $p-1=-1/2$ y $q-1=1/2$, de lo que deducimos que $p=1/2$ y $q=3/2$, ambos mayores que 0. Se trata de una integral convergente y podemos calcular su valor.

$$\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{1/2} dx = \beta\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{(2-1)\Gamma(1)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi}\right)^2}{1} = \frac{\pi}{2}$$

3. Calcular, si es posible, el área de los conjuntos que se indican.

(a) $\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ y\geq 0, y\leq \dfrac{1}{x^2}\right\}$

(b) Región limitada por la curva $y = 1/x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$

(c) Región limitada por la curva $y = 1/\sqrt{x}$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$

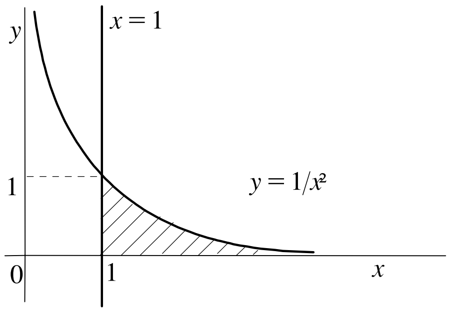
(d) Región dada por

$$\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ x\leq -2, 0\leq y\leq \frac{1}{x^2+4}\right\}\cup\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / -2\leq x\leq 2, \frac{1}{x^2+4}\leq y\leq 0\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ / \ 2\leq x\leq 3, 0\leq y\leq \frac{1}{x^2+4}\right\}$$

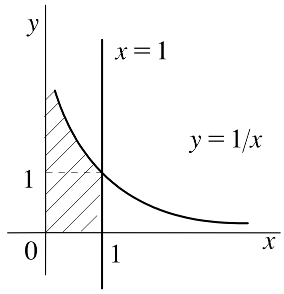
<u>**Solución:**</u>

(a) Dibujamos el recinto definido.



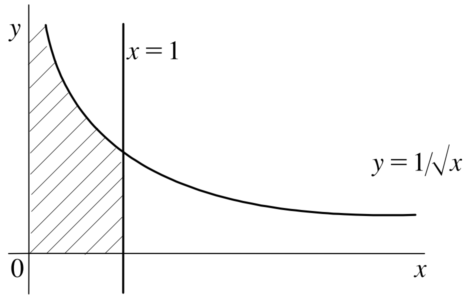
El área de la región está dada por la integral $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$. Vemos si este área es finita estudiando si la integral es convergente. Como hemos visto en el ejercicio 1(a) la integral es convergente y vale 1.

(b) De nuevo dibujamos el recinto definido.



En este caso el área está dada por la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Se trata de una integral divergente y, por tanto, el área delimitada por las cuatro curvas es infinita.

(c) Representamos el recinto definido.

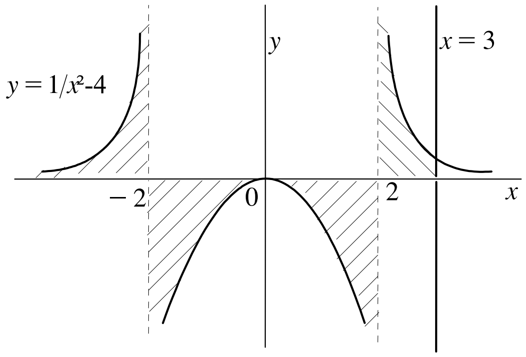


El área a calcular viene dada por la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_\varepsilon^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

(d) Representamos de nuevo el recinto del que queremos calcular el área.



El área vendrá dada por

$$\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^2-4}+\int_{-2}^{2}-\frac{dx}{x^2-4}+\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-4}$$

La primera integral es impropia por ambos extremos (intervalo no acotado y función no acotada en el punto $x=-2$). Procedemos a descomponerla en suma de dos integrales

$$\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^2-4}=\int_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{x^2-4}+\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2-4}$$

Observando la simetría del recinto comprendido entre las rectas $y=-2$ e $y=2$ obtenemos

$$\int_{-2}^{2}-\frac{dx}{x^2-4}=-2\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4}$$

Así el área a calcular será suma de integrales de las que procedemos a estudiar su convergencia:

$$\int_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{x^2-4}+\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x^2-4}-2\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4}+\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-4}$$

La divergencia de alguna de las integrales concluiría con la divergencia del resultado y por tanto, tendríamos área infinita. Veamos que la tercera integral es divergente: como

$$0\le x\le 2\Rightarrow 2\le x+2\le 4$$

y $\left(x^2-4\right)=(x-2)(x+2)$, entonces se verifica

$$\left(x^2-4\right)\le 4(x-2),\forall x\in[0,2]\Rightarrow\frac{1}{\left(x^2-4\right)}>\frac{1}{4(x-2)}\ge 0,\forall x\in[0,2)$$

y utilizando criterios de comparación, por ser la integral $\int_{0}^{2}\frac{dx}{2-x}$ divergente, también lo es $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4}$. Concluimos así que el área es infinita.

4. Si con $f(t)$ denotamos el ritmo del beneficio de una empresa (en unidades monetaria por año) y con r la tasa de interés (en tanto por uno), llamamos valor actual del beneficio futuro a $P(r)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-rt}dt$.

Se pide:

(a) Calcular $P(r)$ cuando $f(t) = e^t, r > 1$. Observar el comportamiento de $P(r)$ ante las variaciones del tipo de interés r.

(b) Los ingresos de una empresa se acumulan a un ritmo dado por la función $f(t) = 2\frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}$ millones de pesetas/año. Utilizando la función Γ, calcular el ingreso futuro de la empresa.

Solución:

(a) $P(r) = \int_0^\infty e^t e^{-rt} dt = \int_0^\infty e^{(1-r)t} dt$. Se trata de una integral impropia por tratarse de un intervalo de integración no acotado. Comprobamos que se cumple la condición necesaria de convergencia para $r > 1$ ya que $\lim_{t\to\infty} e^{(1-r)t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{(r-1)t}} = 0$. Procedemos a calcular la integral utilizando la definición.

$$P(r) = \int_0^\infty e^t e^{-rt} dt = \int_0^\infty e^{(1-r)t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(1-r)t} dt = \lim_{b\to\infty} \left(\left. \frac{e^{(1-r)t}}{1-r} \right|_0^b \right) = \frac{1}{1-r} \lim_{b\to\infty} \left(e^{(1-r)b} - e^0 \right)$$

$$= \frac{1}{1-r}(0-1) = \frac{1}{r-1}$$

Si ahora calculamos la derivada de la función $P(r)$

$$P'(r) = \frac{-1}{(r-1)^2} < 0, \forall r \in \mathbb{R}$$

observamos que la función $P(r)$ decrece al crecer r y crece cuando está última disminuye.

(b) El ingreso futuro que hemos de calcular es

$$\int_0^\infty f(t) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt .$$

Hacemos el cambio de variable $t^2 = x$, es decir $t = x^{1/2}$ y $dt = dx/2x^{1/2}$,.con el intervalo de integración

$$t = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{y} \quad t = \infty \Rightarrow x = \infty$$

de donde se deduce que:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \frac{1}{2} t^{-1/2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

Ejercicios propuestos

1. Determinar la convergencia de las siguientes integrales. En los casos en los que se demuestre la convergencia, calcular el valor de la integral.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$ (b) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$ (c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ (d) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-2}}$

(e) $\int_{-\infty}^{2} xe^x dx$ (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+8x^2}$ (g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales.

(a) $\int_0^{+1} \frac{dx}{x^2+2x}$ (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ (c) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

3. Hallar el área de los siguientes conjuntos.

(a) Región limitada por la curva $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ y sus asíntotas.

(b) Región limitada por la curva $y = \operatorname{tg} x$, sus asíntotas verticales $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ y la recta $y = 0$.

4. Si el flujo de beneficios de una empresa (en unidades monetaria por año) viene dado por $f(t) = e^{-t}$, calcular

(a) Beneficio total futuro (a partir de $t=0$).

(b) Sabiendo que $r = 0{,}05$ es la tasa de interés (en tanto por uno), determinar el valor actual de todo el beneficio futuro definido por

$$VA(r) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-rt}\, \mathrm{d}t$$