TEMA 7

Métodos fundamentales del cálculo de primitivas

Contenidos:

1. Primitivas inmediatas.

Al conjunto de todas las funciones primitivas de una función se le denomina integral indefinida; así pues, para obtener la integral indefinida de una función integrable debemos determinar un procedimiento para calcular al menos una primitiva de dicha función. Como el proceso de obtención de una primitiva puede considerarse como el problema inverso a la derivación, entonces todas las reglas utilizadas para el cálculo de derivadas (tomadas ahora en sentido inverso) nos permitan obtener funciones primitivas de una función dada.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c} F(x) \\ \text{Función primitiva} \end{array}} \arrow[r, shift left, "\text{derivación}"] & \boxed{\begin{array}{c} F'(x) \\ \text{Función derivada} \end{array}} \arrow[l, shift left, "\text{integración}"] \end{tikzcd}$$

Partiendo de estas ideas se llaman *integrales inmediatas* ó *primitivas inmediatas* a aquellas integrales que se calculan directamente a partir de la definición de derivada.

Las integrales inmediatas más sencillas son las siguientes:

$$(1.1)\quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{si} \quad n \neq -1$$

$$(1.2)\quad \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(1.3)\quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$(1.4)\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$(1.5)\quad \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$

$$(1.6)\quad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$(1.7)\quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$(1.8)\quad \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x) dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$(1.9)\quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$(1.10)\quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

2. Propiedades algebraicas del cálculo de primitivas.

Las principales propiedades algebraicas de las integrales indefinidas se deducen inmediatamente de las propiedades de las funciones derivables, y son las siguientes:

Propiedad 1. *Si las funciones f(x) y g(x) admiten funciones primitivas en un cierto dominio, entonces se verifica*

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Propiedad 2. *Si la función f(x) admite una función primitiva en un dominio dado, entonces se verifica*

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx\,, \ \ \textit{para todo} \ \ k \in \mathbb{R}$$

Utilizando lo visto en los apartados 1 y 2 ya podemos resolver algunas primitivas sencillas:

Ejemplo 1.

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} \right) dx = \frac{2}{3}\int x^2 dx - \frac{1}{2}\int x^{1/3} dx = \frac{2}{9}x^3 - \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^4} + C$

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{4}{x} + 3x^4 - \cos x \right) dx = \int \frac{4dx}{x} + 3\int x^4 dx - \int \cos x\, dx = 4\ln|x| + \frac{3}{5}x^5 - \operatorname{sen} x + C$

3. Método de sustitución o cambio de variable

Supongamos que deseamos calcular la integral $\int f(x)dx$ y ésta no se encuentra dentro del cuadro de integrales inmediatas ya conocidas; sin embargo, nos es posible definir una función diferenciable dependiente de una nueva variable

$$x = g(t)$$

y por tanto

$$dx = g'(t)dt$$

de tal forma que la integral inicial se transforma en una integral inmediata o de cálculo más sencillo que la primera de ellas pues

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt = \int h(t)g'(t)dt$$

Entonces si $F(t)$ es una función primitiva de la última integral y la función $x=g(t)$ admite función inversa $t=g^{-1}(x)$, la integral pedida vendrá dada por

$$\int f(x)dx = \int h(t)g'(t)dt = F(t) + C = F(g^{-1}(x)) + C$$

Ejemplo 2.

$$\int (-2x+5)^{3/2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\int t^{3/2}dt = -\frac{1}{5}t^{5/2} + C = -\frac{1}{5}(-2x+5)^{5/2} + C$$

$$\boxed{-2x + 5 = t \Rightarrow -2dx = dt}$$

Ejemplo 3.

$$\int 2t \operatorname{sen} t^2 dt = \int \operatorname{sen} z\, dz = -\cos z + C = -\cos t^2 + C$$

$$\boxed{t^2 = z \Rightarrow 2t\, dt = dz}$$

Este es el caso más sencillo (y a la vez, el más usual) de cambio de variables: cuando tenemos una primitiva como la del ejemplo 3, es decir, una primitiva del tipo

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$$

$$\boxed{g(x) = t \Rightarrow g'(x)\, dx = dt}$$

Notemos que, en el ejemplo 3, $f(t) = \operatorname{sen} t$ y $g(t) = t^2$.

Ejemplo 4.

$$\int \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \cdot e^{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{g(x)}} dx = \int e^t\, dt = e^t + C = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

$t = \operatorname{sen} x$
$dt = \cos x\, dx$

En ocasiones puede pasar que en la primitiva no se halle exactamente la función $g'(x)$, aunque se pueda conseguir ajustando las constantes.

Es conveniente observar que este es justamente, el caso del ejemplo 2**.**

Ejemplo 5.

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \underbrace{2 \cdot x}_{g'(x)} \cdot e^{\overbrace{x^2}^{g(x)}} dx = \frac{1}{2}\int e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$t = x^2$
$dt = 2x\, dx$

Ejemplo 6.

$$\int \frac{\overbrace{2t}^{g'(t)}}{\underbrace{t^2+4}_{g(t)}} = \int \frac{1}{z} dz = \ln|z| + C = \ln(t^4+4) + C$$

$z = t^2+4$
$dz = 2t\, dt$

En adelante, este último tipo de primitivas (puesto que suele aparecer con bastante frecuencia) lo resolveremos de forma inmediata:

inmediata

$$\overline{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \overline{\ln|f(x)| + C}$$

$f(x) = t$
$f'(x)\, dx = dt$

Ejemplo 7.

$$\int \frac{t^2-3}{-t^3+9t+1}\,dt = -\frac{1}{3}\int \frac{-3t^2+9}{-t^3+9t+1}\,dt = -\frac{1}{3}\ln\left|-t^3+9t+1\right|+C$$

Por último, es importante constatar que a la hora de calcular una integral definida (recordemos que, utilizando la regla de Barrow, se obtiene evaluando una primitiva entre los límites de integración correspondientes) por este procedimiento, no es necesario deshacer el cambio de variables realizado; basta con hacer dicho cambio a la vez en los límites de integración.

Ejemplo 8.

- Deshaciendo el cambio de variable:

$$\int \underbrace{e^t}_{g'(t)} \cos(\underbrace{e^t-1}_{g(t)})\,dt = \int \cos z\,dz = \operatorname{sen} z + C = \operatorname{sen}(e^t-1)+C \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 e^t\cos(e^t-1)\,dt = \operatorname{sen}(e^t-1)\Big|_0^1 = \operatorname{sen}(e-1)$$

$$\boxed{z = e^t-1}$$

- Llevando el cambio de variables en los límites de integración:

$$\int_0^1 e^t\cos(e^t-1)\,dt = \int_0^{e-1}\cos z\,dz = \operatorname{sen}(z)\Big|_0^{e-1} = \operatorname{sen}(e-1)$$

$$\boxed{z = e^t-1} \qquad \boxed{t=1 \Rightarrow z = e-1} \qquad \boxed{t=0 \Rightarrow z = 0}$$

4. Método de integración por partes.

Consideremos $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones diferenciables en un dominio D. Si aplicamos la fórmula de la diferencial de un producto, se tiene que

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \Rightarrow udv = d(u \cdot v) - vdu$$

Si ahora integramos miembro a miembro y tenemos en cuenta las propiedades de la integral indefinida y la relación que guardan los operadores diferencial e integral se tiene que

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

fórmula conocida como el nombre de *integración por partes* y que es válida salvo una constante arbitaria.

Por tanto el método de integración por partes se reduce a aplicar esta fórmula de tal forma que el cálculo de la integral $\int u \cdot dv$ se reduce al cálculo de $\int v \cdot du$; de aquí que sea ventajosa su utilización cuando se sepa calcular esta última, o bien, cuando la segunda sea más sencilla que la primera.

Ejemplo 9.

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dv} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow\; v = e^x \end{array}}$$

Este método se suele emplear cuando tenemos en el integrando un producto de integrales, es decir: $\int f(x) \cdot g(x) dx$, y por tanto esto nos muestra un patrón de aplicación "fácilmente reconocible". Sin embargo, hay que saber elegir convenientemente *u* y *dv*. Para ello, siempre tomaremos por *dv* a la función que tenga un cálculo de primitivas más sencillo.

En algunas primitivas, hay que aplicar varias veces el procedimiento de integración por partes, como sucede en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 \;\Rightarrow\; du = 2x\, dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \;\Rightarrow\; v = -\cos x \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = \cos x\, dx \;\Rightarrow\; v = \operatorname{sen} x \end{array}}$$

En este caso, ambas funciones (x^2 y sen$x$) tienen primitivas sencillas, pero (como se ve en el ejemplo) cuando queremos calcular una primitiva de la forma $\int x^n f(x)dx$, con $n \in N$, tomaremos $u = x^n$ para ir reduciendo paulatinamente el grado de x. Así, para calcular una primitiva de este tipo se necesitará aplicar el método de "partes" n veces.

En determinadas primitivas, al aplicar este procedimiento se obtiene nuevamente la primitiva original, lo que puede dar lugar a una ecuación integral.

Ejemplo 11.

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx$$

$u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x\, dx$
$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\, dx$
$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Entonces

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx + C ,$$

por lo que si consideramos $I = \int e^x \cos x\, dx$ como una incógnita, de la igualdad anterior obtendríamos la ecuación

$$I = e^x \cos x + e^x senx - I$$

y al resolver, despejando la variable I, obtenemos

$$\int e^x \cos x\, dx = I = \frac{e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + C$$

Finalmente, este procedimiento de integración por partes se utiliza cuando queremos calcular primitivas de una función un "tanto complicada" (como ejemplo, ln$x$, arcsen$x$, arccos$x$, arctg$x$, …); veamos un ejemplo.

Ejemplo 12.

$$\int_1^e \ln x\, dx = x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1$$

$u = \ln x \Rightarrow du = 1/x\, dx$
$dv = dx \Rightarrow v = x$

5. Integración de funciones racionales.

Se llaman funciones racionales a las funciones del tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Denominaremos por tanto *integrales racionales* a integrales del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, siendo $p(x)$ y $q(x)$ polinomios arbitrarios.

Para calcular estas integrales distinguiremos los siguientes casos:

CASO 1. *Grado q(x) $\leq$ grado p(x)*

En esta caso se efectúa la división de los polinomios, con lo que se obtiene que:

$$D= d \cdot c + r \Rightarrow \frac{D}{d} = c + \frac{r}{d} \Rightarrow \quad \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(D = dividendo; d=divisor; c=cociente; r=resto)

y la integral se descompone en suma de dos integrales

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int c(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

donde esta última es una integral racional cuyo grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador (caso 2), y la primera es una integral inmediata**.**

Ejemplo 13.

$$\int \frac{x^4 - 3x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx = \underbrace{\int (x^2 - 2x) dx}_{\text{inmediata}} + \underbrace{\int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx}_{\text{ya es del tipo 2}}$$

CASO 2. *Grado q(x) >grado p(x)*

Si el grado del numerador es mayor estricto que el grado del denominador, entonces estudiaremos las raíces del denominador, de tal forma que se pueden presentar los siguientes subcasos.

A. Raíces reales simples.

Supongamos que el grado del polinomio $q(x)$ sea n y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ las n raíces reales y distintas de dicho polinomio. En este caso, la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ admite la siguiente descomposición en suma de fracciones simples:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

donde los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se determinan igualando los numeradores de las dos fracciones obtenidas.

A partir de esta descomposición la integral buscada se descompone en suma de integrales inmediatas:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = A_1 \int \frac{dx}{x-\alpha_1} + A_2 \int \frac{dx}{x-\alpha_2} + \ldots + A_n \int \frac{dx}{x-\alpha_n} =$$

$$= A_1 \ln|x-\alpha_1| + A_2 \ln|x-\alpha_2| + \ldots + A_n \ln|x-\alpha_n| + C$$

Ejemplo 14.

$$\int \frac{x+2}{x^3-x}dx = \int \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)}dx$$

Como $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$, la descomposición en fracciones simples se realiza de la siguiente forma:

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

y por tanto, $x+2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$. Para calcular A, B y C, damos a x los valores de las raíces del denominador

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \rightarrow 2 = -A \\ x = 1 \rightarrow 3 = 2C \\ x = -1 \rightarrow 1 = 2B \end{array}\right\} \rightarrow A = -2; B = 1/2; C = 3/2$$

y, entonces, se tiene que

$$\int \frac{x+2}{x^3-x}dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{1/2}{x+1} + \frac{3(2}{x-1} \right) dx =$$

$$= -2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + C = \ln\left(\frac{\sqrt{|x-1|^3 |x+1|}}{x^2} \right) + C$$

B. Raíces reales múltiples.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ las raíces del polinomio $q(x)$, donde $m_1, m_2, \ldots, m_s$ son sus órdenes de multiplicidad (el número de veces que se repite cada raíz). Entonces se tiene que

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \frac{p(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_s)^{m_s}}dx$$

La fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ se descompone en este caso en los siguientes sumandos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_1}{x-\alpha_s} + \frac{B_2}{(x-\alpha_s)^2} + \ldots + \frac{B_{m_s}}{(x-\alpha_s)^{m_s}}$$

es decir, cada raíz da lugar a tantas fracciones como indica el orden de su multiplicidad. Los coeficientes $A_1, A_2, \ldots, A_{m_1}, \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_{m_s}$ se determinan igualando los numeradores que se obtienen en ambas fracciones, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx = \int \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}dx$$

Como $x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$, incluimos una fracción por cada potencia de x y de x +1

$$\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$$

Así, se tiene que $5x^2+20x+6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$. Entonces

$$x = 0 \to 6 = A$$

$$x = -1 \to 9 = C$$

y, como nos hemos quedado sin raíces del denominador, tomamos otro valor cualquiera para x

$$x = 1 \to 31 = 4A + 2B + C \to B = -1$$

En consecuencia, se obtiene que:

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx = \int \left(\frac{6}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{9}{(x+1)^2} \right) dx =$$

$$= 6\ln|x| - \ln|x+1| + 9\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \ln\left(\frac{x^6}{|x+1|}\right) + 9\int \frac{dt}{t^2} =$$

$$= \ln\left(\frac{x^6}{|x+1|}\right) - \frac{9}{x+1} + C$$

$\boxed{t = x+1}$

C. Factores cuadráticos sin raíces reales.

Si el denominador únicamente tiene raíces complejas, se emplea el procedimiento de completar cuadrados. Para estudiar este procedimiento consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.

Sea la integral $\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$. Si estudiamos las raíces del denominador obtenemos que

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i$$

es decir tenemos únicamente raíces complejas.

Completando el cuadrado del polinomio $x^2 - 4x + 7 = 3 + (x-2)^2$, se tiene que

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+7} = \int \frac{dx}{3+(x-2)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{(x-2)^2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$\boxed{t = \frac{x-2}{\sqrt{3}}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} t + C = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Como se observa, cuando el numerador es una constante, todo consiste en, tras completar el cuadrado, buscar la "forma" de la primitiva de la arcotangente.

Algunas veces cabe la posibilidad de que ya se halle completado el cuadrado y únicamente tengamos que hacer el cambio de variable que sea pertinente.

Ejemplo 17.

$$\int \frac{1}{4+3x^2}dx = \int \frac{1}{4\left(1+\frac{3}{4}x^2\right)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\int \frac{1}{1+z^2}dz =$$

$$\boxed{z = \frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(z) + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C.$$

Ejemplo 18.

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{4}{x^2+2x+2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\int \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \ln\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right) - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\boxed{t = x+1}$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C$$

Como se observa en el ejemplo anterior, cuando el numerador tenga grado uno debemos buscar primero la “forma” de la primitiva del logaritmo neperiano para posteriormente conseguir la de la arcotangente.

Finalmente, si el denominador tiene distintos tipos de raíces, se descompone como en el siguiente ejemplo.

<u>**Ejemplo 19.**</u> $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}dx$

Como $(x^2-x)(x^2+4) = x(x-1)(x^2+4)$, incluimos una fracción por cada factor (teniendo en cuenta que al ser x^2+4 un polinomio de grado dos debemos situar en el numerador del factor correspondiente a este sumando un polinomio de grado uno) y escribimos:

$$\frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{A(x-1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x-1)}{x(x-1)(x^2+4)}$$

$$x = 0 \to A = 2$$

$$x = 1 \to B = -2$$

$$\left.\begin{aligned} x = -1 &\to -C + D = 2 \\ x = 2 &\to 2C + D = 8 \end{aligned}\right\} \to C = 2; D = 4$$

Entonces:

$$\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}dx = \int \frac{2}{x}dx - \int \frac{2}{x-1}dx + \underline{\int \frac{2x+4}{x^2+4}dx} =$$

sólo tiene raíces complejas

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln(x^2+4) + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= \ln\left(\frac{x^2(x^2+4)}{(x-1)^2}\right) + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

6. Algunos cambios de variables especiales.

En ocasiones, hay que emplear algunos cambios de variables que no siguen el modelo de los presentados en el apartado 3, y que básicamente se utilizan para transformar una integral en otra, de forma que esta última se resuelva por medio de alguno de los procedimientos vistos anteriormente. Entre los procedimientos más habituales podemos destacar los siguientes.

CASO 1. *Para primitivas de productos o cocientes de* $\operatorname{sen}^p x$ *y* $\cos^q x$.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^p x}{\cos^q x} dx \, ; \qquad \int \frac{\cos^q x}{\operatorname{sen}^p x} dx; \qquad \int \operatorname{sen}^p x \cdot \cos^q x \, dx$$

Para este tipo de integrales hay tres posibles métodos de resolución.

A) Si *p* es par y *q* es impar. En este caso utilizaremos el cambio de variables $\operatorname{sen} x = t$.

Ejemplo 20.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} \quad \to \quad \text{se trata de una integral racional}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = \operatorname{sen} x \to dt = \cos x \, dx \\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2 \end{array}}$$

B) Si *p* es impar y *q* es par. En este caso hacemos el cambio $\cos x = t$.

Ejemplo 21.

$$\int \frac{\cos^6 x}{\operatorname{sen} x} dx = -\int \frac{t^6}{1-t^2} dt \quad \to \quad \text{integral racional}$$

C) Si *p* es par y *q* es par. En este caso hacemos el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Para este cambio de variable debemos tener en cuenta que

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \to dx = \cos^2 x dt = (1+t^2) dt$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \to \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Ejemplo 22.

$$\int \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x} dx = \int \operatorname{tg}^4 x \, dx = \int t^4 (1+t^2) dt \quad \to \quad \text{integral inmediata.}$$

Por último, aparte de estos cambios, hay tres casos especiales que merecen nuestra atención puesto que no se resuelven aplicando estas reglas; se hacen utilizando fórmulas y relaciones trigonométricas:

Ejemplo 23.

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\boxed{\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x}$$

Ejemplo 24.

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

$$\boxed{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x}$$

Ejemplo 25.

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x - 1) dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

CASO 2. *Integrales irracionales.*

Para obtener primitivas de funciones irracionales existen diferentes cambios con los que obtenemos integrales mucho más sencillas. Por ejemplo, para las primitivas de funciones con raíces de la forma

$$\int f\left(\sqrt[p]{g^l(x)}, \sqrt[q]{g^m(x)}, \sqrt[r]{g^n(x)}, \ldots \right) dx$$

siendo $g(x)$ un polinomio de grado 1, tomaremos $g(x) = t^{mcm(p,q,r,\ldots)}$.

Ejemplo 26.

$$\int x^2 \sqrt{1-x}\, dx = -2\int t^2 (1-t^2)\, dt \;\rightarrow\; \text{integral inmediata}$$

$$\boxed{1 - x = t^2}$$

Ejemplo 27.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^5}(1 - \sqrt[6]{x})} dx = \int \frac{t^{24/3} + t^{36/4}}{t^{60/3}(1 - t^{12/6})} 12t^{11} dt = \int \frac{t^8 + t^9}{t^{20}(1-t^2)} 12t^{11} dt = \int \frac{12dt}{t(1-t)} \rightarrow \text{integral racional}$$

$$\boxed{x = t^{11}}$$

Ejercicios resueltos

1. $\int (x-2)^{3/2}\, dx$

Solución: $\int (x-2)^{3/2}\, dx = \dfrac{(x-2)^{5/2}}{5/2} + C = \dfrac{2}{5}\sqrt{(x-2)^5} + C$

2. $\int e^x \cos e^x\, dx$

Solución: Haciendo el cambio de variable $t = e^x$, resulta $\int e^x \cos e^x\, dx = \operatorname{sen} e^x + C$.

3. $\int x\left(2x^2+3\right)^{1/3} dx$

Solución: Haciendo el cambio de variable $t = 2x^2+3$ nos queda

$$\int x\left(2x^2+3\right)^{1/3} dx = \frac{1}{4}\,\frac{\left(2x^2+3\right)^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{16}\left(2x^2+3\right)^{4/3} + C$$

4. $\int \dfrac{t^3+5t^2-4}{t^2}\, dt$

Solución: $\int \dfrac{t^3+5t^2-4}{t^2}\, dt = \int t\, dt + \int 5\, dt - 4\int \dfrac{1}{t^2}\, dt = \dfrac{t^2}{2} + 5t + \dfrac{4}{t} + C$

5. $\int \operatorname{sen} x^2 \cos x\, dx$

Solución: Tomando $t = \operatorname{sen} x$ nos queda $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$.

6. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

<u>**Solución:**</u> Mediante el cambio de variable $t = \ln x$, resulta

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

<u>**Solución:**</u> El cambio de variable $t = x^2$ nos conduce a

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{1/2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t + C$$

8. $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$

<u>**Solución:**</u> La resolvemos por partes tomando:

$$\left\{\begin{matrix} u = \ln x\ ,\ \ du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx,\ \ v = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix}\right\}$$

de donde resulta:

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2dx = = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

9. $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

<u>**Solución:**</u> Tomando

$$\left\{\begin{matrix} u = x\ ,\ \ du = dx \\ dv = \cos x\,dx,\ \ v = \operatorname{sen} x \end{matrix}\right\}$$

nos queda

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C$$

10. $\int (\ln x)^2\, dx$

<u>**Solución:**</u> Integrando por partes, con

$$\left\{\begin{matrix} u = (\ln x)^2 \;\;,\;\; du = 2\dfrac{1}{x}\ln x\, dx \\ dv = dx, \;\; v = x \end{matrix}\right\},$$

resulta

$$\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx$$

y volviendo a integrar por partes, ahora con

$$\left\{\begin{matrix} u = \ln x \;\;,\;\; du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx, \;\; v = x \end{matrix}\right\},$$

llegamos a

$$\int (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 - 2\left[x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx\right] = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

11. $\int x\sqrt{1+x}\, dx$

<u>**Solución:**</u> Integramos por partes, tomando

$$\left\{\begin{matrix} u = x \;\;,\;\; du = dx \\ dv = \sqrt{x+1}\, dx, \;\; v = \dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} \end{matrix}\right\}$$

de donde obtenemos

$$\int x\sqrt{1+x}\, dx = \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\, dx = \frac{2x}{3}(x+1)^{3/2} + \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C$$

12. $\int e^x \operatorname{sen} 2x\, dx$

<u>**Solución:**</u> Integramos por partes dos veces. Tomamos en primer lugar

$$\left\{\begin{matrix} u = \operatorname{sen} 2x \;\;,\;\; du = 2\cos 2x dx \\ dv = e^x\, dx, \;\; v = e^x \end{matrix}\right\},$$

de donde resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x\, dx = e^x \operatorname{sen} 2x - 2\int e^x \cos 2x\, dx\ .$$

Volviendo a integrar por partes en la integral que resta, con

$$\left\{\begin{array}{l} u = \cos 2x\ ,\ \ du = -2\operatorname{sen} 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx,\ v = e^x \end{array}\right\}$$

se llega a

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} 2x\, dx &= e^x \operatorname{sen} 2x - 2\left[e^x \cos 2x + 2\int \operatorname{sen} 2x\, e^x dx\right] = \\ &= e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int \operatorname{sen} 2x\, e^x dx.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$5\int e^x \operatorname{sen} 2x\, dx = e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x\ ,$$

de donde obtenemos que

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{e^x}{5}\left[\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x\right]$$

13. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\, dx$

<u>**Solución:**</u> Las raíces del denominador son:

$$x^3 + x^2 - 6x = x\left(x^2 + x - 6\right) = x(x-2)(x+3)\ .$$

Por lo tanto

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\, dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x+3} dx + \int \frac{C}{x-2} dx\ .$$

Calculamos los coeficientes A, B y C, tomando el mínimo común múltiplo en los cocientes anteriores, de donde resulta:

$$x + 1 = A(x+3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+3)$$

De esta forma, igualando los coeficientes del polinomio anterior obtenemos que

$$A = \frac{-1}{6},\ B = \frac{-2}{15},\ C = \frac{3}{10}.$$

Por tanto,

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\, dx = -\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + \frac{3}{10}\ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{(x-2)^{3/10}}{x^{1/6}(x+3)^{2/15}}\right| + C\ .$$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+x-2}{x^4+3x^2+2}\,dx$

Solución: Calculamos primero las raíces del denominador: $x^4+3x^2+2=0$. Para ello hacemos el cambio de variable $x^2=y$. Entonces, como $y^2+3y+2=(y+1)(y+2)=0$, el denominador tiene raíces complejas y se escribe $x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$.

Por tanto,

$$\frac{x^3+2x^2+x-2}{x^4+3x^2+2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

y

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+x-2 &= (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)= \\ &=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+(B+2D) \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned} 1&=A+C \\ 2&=B+D \\ 1&=2A+C \\ -2&=B+2D \end{aligned}$$

de donde obtenemos $A=0$, $B=-4$, $C=1$ y $D=6$.

Así pues,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x^2+x-2}{x^4+3x^2+2}dx &= \int \frac{-4}{x^2+2}dx+\int \frac{x+6}{x^2+2}dx=-4\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2}dx+6\int\frac{1}{x^2+2}dx= \\ &=-4\operatorname{arc\,tg}x+\ln\sqrt{x^2+2}+\frac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C \end{aligned}$$

15. $\displaystyle\int \frac{2x^3}{(x^2-1)^2}\,dx$

Solución: El denominador tiene dos raíces reales, 1 y –1 de multiplicidad 2:

$$(x^2-1)^2=(x^2-1)(x^2-1)=(x-1)(x+1)(x-1)(x+1).$$

Por tanto,

$$\frac{2x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

luego,

$$2x^3 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

Dando valores a la x tenemos:

$$\begin{aligned} &x = 1, \quad 2 = 4B \\ &x = -1, \quad -2 = 4D \\ &x = 0, \quad 0 = -A + B + C + D \\ &x = 2, \quad 16 = 9A + 9B + 3C + D \end{aligned}$$

de donde obtenemos $A=1$, $B=1/2$, $C=1$ y $D=-1/2$.

Así pues,

$$\int \frac{2x^3}{\left(x^2-1\right)^2} dx = \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2} + \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2} =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{1}{2}\frac{\left(x-1\right)^{-1}}{-1} + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{\left(x+1\right)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) + C = \ln|x^2-1| - \frac{1}{x^2-1} + C$$

16. $\displaystyle\int \frac{x^4-7x}{x^3+1} dx$

<u>**Solución:**</u> Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, dividimos el numerador entre el denominador obteniendo:

$$x^4 - 7x = \left(x^3+1\right)x - 8x.$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^4-7x}{x^3+1} dx = \int x dx - 8\int \frac{x}{x^3+1} dx.$$

El polinomio $x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right)$ tiene una raíz real, $x=$ -1, y dos raíces complejas.

Por tanto,

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

luego,

$$x = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

Igualando coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= -A + B + C \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

de donde obtenemos $A= -1/3$, $B = C = 1/3$.

Así pues,

$$\int \frac{x^4-7x}{x^3+1}dx = \int x dx - 8\int \frac{x}{x^3+1}dx. = \frac{x^2}{2} - 8\left(\int \frac{-1/3}{x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}\ln|x+1| - \frac{8}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}\ln|x+1| - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \int \frac{3/2}{x^2-x+1}dx\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{8}{3}\ln|x+1| - \frac{4}{3}\ln|x^2-x+1| - \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C$$

Ejercicios propuestos

1. Calcular las siguientes primitivas:

a. $\int \frac{2}{(t-9)^2}dt$ **b.** $\int \frac{-2xdx}{\sqrt{x^2-4}}$ **c.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})}$

d. $\int \frac{e^{1/t}}{t^2}dt$ **e.** $\int x^2 e^{2x} dx$ **f.** $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

g. $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ **h.** $\int x \ln x dx$ **i.** $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$

j. $\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}dx$ **k.** $\int \frac{4x^2-1}{2x(x^2+2x+1)}dx$ **l.** $\int \frac{4x^2+2x-1}{x^3+x^2}dx$

m. $\int \frac{2x^4+2x^2-2x+2}{x^5-x^4-x+1}dx$ **n.** $\int \frac{2t-1}{t^2+4}dt$ **ñ.** $\int \frac{2x-5}{x^2+2x+2}dx$

o. $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x\, dx$ **p.** $\int \frac{\operatorname{cotg}^2 t}{\operatorname{cosec} t}dt$ **q.** $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\, dx$

r. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}dx$ **s.** $\int \cos^2 3x\, dx$ **t.** $\int x\sqrt[3]{x+1}dx$

u. $\int \frac{3\sqrt[3]{x}+1}{x+x\sqrt[3]{x}}dx$ **v.** $\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}dx$ **w.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{2x}}$

2. Calcular las siguientes integrales definidas:

a. $\int_{2/3}^{1}(3x-2)^4 dx$ **b.** $\int_0^2 \frac{dx}{4+3x^2}$ **c.** $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\, dx$

d. $\int_0^1 x^3 e^x dx$ **e.** $\int_4^3 \frac{x^3-4x^2+3x-8}{x^3-6x^2+12x-8}dx$ **f.** $\int_{-1/2}^{0} \frac{\sqrt{1+2x}}{x+1}dx$