TEMA 6

Integral definida de Riemman

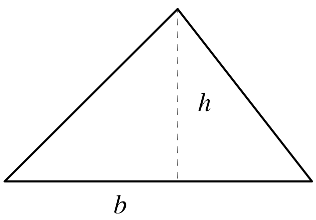
Contenidos:

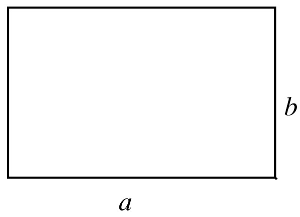
1. Introducción

El área es un concepto por todos conocidos a través del estudio de varias figuras geométricas: rectángulo, triángulo, cuadrado, círculo, polígono, etc.

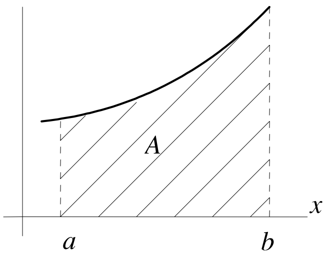
Generalmente se piensa en el área como en una magnitud que mide, de algún modo, el tamaño de una región acotada. Cuando estas regiones tienen la forma de alguna de las figuras geométricas antes citadas, se dispone de fórmulas para calcular su área, por ejemplo:

$$\text{área} = \frac{b \times h}{2} \qquad\qquad \text{área} = a \times b$$

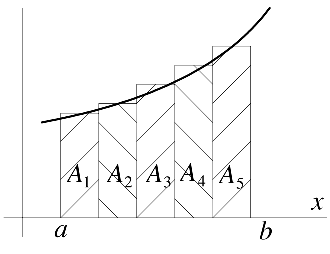




Ahora bien, si se desea calcular el área del conjunto *A,* habrá que desarrollar un método, ya que no existe ninguna figura geométrica de esta forma y por consiguiente tampoco hay ninguna expresión que determine su área.



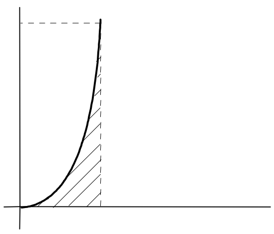
Podríamos calcular el valor aproximado del área de *A* mediante la suma de varios rectángulos de la forma:

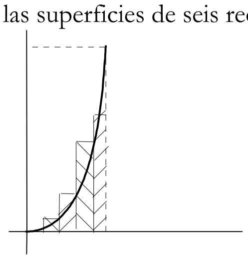


$$\text{área }(A) \approx \text{área }(A_1) + \text{área }(A_2) +$$
$$+\text{área }(A_3) + \text{área }(A_4) + \text{área }(A_5)$$

Ejemplo 1. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, y la recta vertical $x = 3$.

Solución. Puede estimarse el área mediante la suma de las superficies de seis rectángulos.





Se divide el intervalo [0,3] en seis subintervalos más pequeños, cada uno de ellos de longitud 1/2:

[0,1/2]   [1/2,1]   [1,3/2]   [3/2,2]   [2,5/2]   [5/2,3]

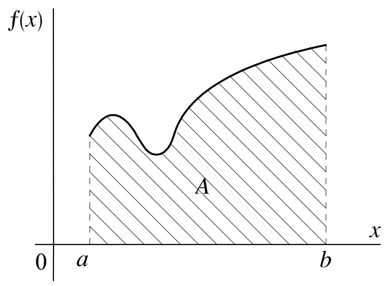
Se dibuja sobre cada subintervalo un rectángulo de altura igual a la curva $y = x^2$ en el punto medio de ese subintervalo. Fácilmente puede comprobarse que el área total de los seis rectángulos es:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{9}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{11}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=8.9375$$

Este valor no es exactamente el área del conjunto dado; es únicamente una estimación de dicha área. Parece razonable esperar que cuantos más rectángulos se consideren, más aproximado será el valor de la suma de las áreas de dichos rectángulos al valor exacto del área del conjunto dado.

En esta idea se basa el concepto de integral definida de Riemman, como se verá a continuación, una vez establecidos algunos conceptos previos a los que se hará referencia posteriormente.

- Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, se denomina *conjunto ordenado* de f a la parte del plano comprendida entre la gráfica de f y el eje OX, esto es: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

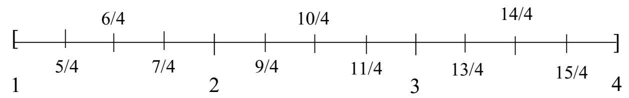


El conjunto ordenado de f es objeto de nuestro estudio ya que una vez que se conozca cómo calcular su área, será posible evaluar el área de cualquier región plana.

- Dado el intervalo $[a,b]$ $(a < b)$, se dice que P es una *partición* de dicho intervalo si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ con $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

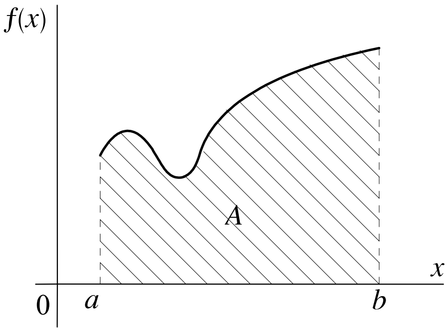
- La partición P divide a $[a,b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, \ldots, n$. Se denota por Δx_i a la longitud del subintervalo i-ésimo, es decir, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. El valor $\Delta = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}$ se denomina *diámetro de la partición.*

Ejemplo 2. Dado el intervalo [1,4], $P = \{1, 2, 3, 4\}$ es una partición de [1,4] en tres subintervalos [1,2], [2,3] y [3,4] de longitud 1. $P = \{1, 3, 7/2, 4\}$ es también partición de [1,4] en tres subintervalos [1,3], [3,7/2], [7/2, 4] con diámetro $\Delta = 2$. Una partición del intervalo [1,4] que lo divide en un número n de subintervalos de igual longitud se define como $P = \{1, 1+\Delta, 1+2\Delta, \ldots, 4-\Delta, 4\}$, siendo $\Delta = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$, es decir, $P = \{1, 1+\frac{3}{n}, 1+\frac{6}{n}, \ldots, 4-\frac{3}{n}, 4\}$. Por ejemplo, para $n = 12$ se tiene $\Delta = 1/4$ y por tanto: $P = \{1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, 3, \frac{13}{4}, \frac{14}{4}, \frac{15}{4}, 4\}$.

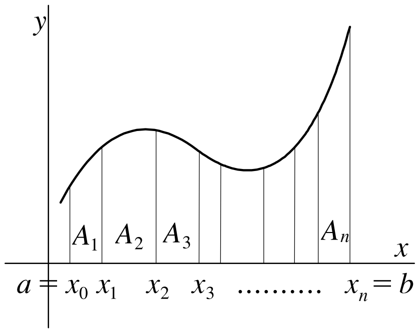


2. Planteamiento y definición

Sea f una función continua no negativa en el intervalo [a,b] y sea A el conjunto ordenado asociado del cual se desea conocer su área.



Inicialmente calcularemos el área hallando el límite de una suma de áreas de rectángulos. Para ello, se divide el intervalo [a,b] en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$, con ayuda de la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, donde $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Esta partición divide a su vez al conjunto A en n subconjuntos A_1, A_2, …, A_n de forma que área (A) = área (A_1) + área (A_2) + … + área (A_n).



Por ser f continua, el teorema de los valores extremos garantiza que para todo i = 1, …, n, f tiene un mínimo y un máximo en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, esto es:

$$\exists\, m_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ tal que } f(m_i) = \text{mínimo valor de } f \text{ en } [x_{i-1}, x_i]$$

$$\exists\, M_i \in [x_{i-1}, x_i] \text{ tal que } f(M_i) = \text{máximo valor de } f \text{ en } [x_{i-1}, x_i]$$

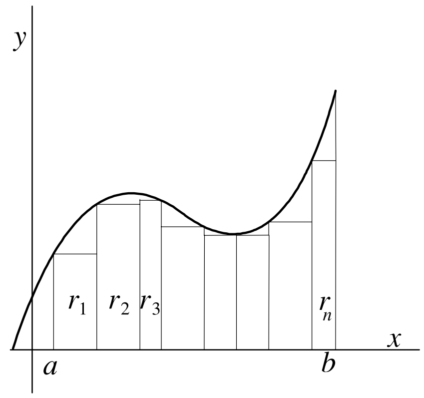
El área de cada conjunto A_i (i = 1, …, n) se puede estimar por el área de un rectángulo inscrito r_i o circunscrito R_i que tenga por altura $f(m_i)$ o $f(M_i)$ respectivamente y por base Δx_i.

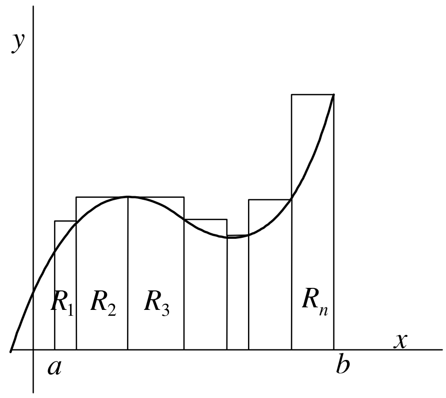
Entonces para cada i = 1, …, n se tiene:

$$\text{área } (r_i) \le \text{área } (A_i) \le \text{área } (R_i)$$

o lo que es igual,

$$f(m_i)\,\Delta x_i \le \text{área } (A_i) \le f(M_i)\,\Delta x_i\,.$$





Sumando estas áreas asociadas a la partición *P*, con diámetro Δ, desde $i = 1$ hasta $i = n$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i \le \text{área}(A) \le \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \qquad [1]$$

Se denomina:

$$\textit{Suma inferior} \text{ a } s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i$$

$$\textit{Suma superior} \text{ a } S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \,.$$

Algunas *propiedades* de estas sumas son las siguientes:

(i) *Para cualquier partición P, con diámetro* Δ*, se verifica* $s(\Delta) \le S(\Delta)$.

En efecto, para todo $i = 1, \ldots, n$, es trivial que $f(m_i) \le f(M_i)$. Como $\Delta x_i > 0$

$$f(m_i)\,\Delta x_i \le f(M_i)\,\Delta x_i$$

y sumando desde $i = 1, \ldots, n$

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i = S(\Delta).$$

□

(ii) *Para cualquier partición P, con diámetro* Δ*, se verifica*

$$s(\Delta) \ge m(b-a)$$

$$S(\Delta) \le M(b-a)$$

donde m = *mínimo valor de f en* $[a,b]$ *y* M = *máximo valor de f en* $[a,b]$.

La comprobación de esta propiedad es inmediata ya que para todo $i = 1, \ldots, n$

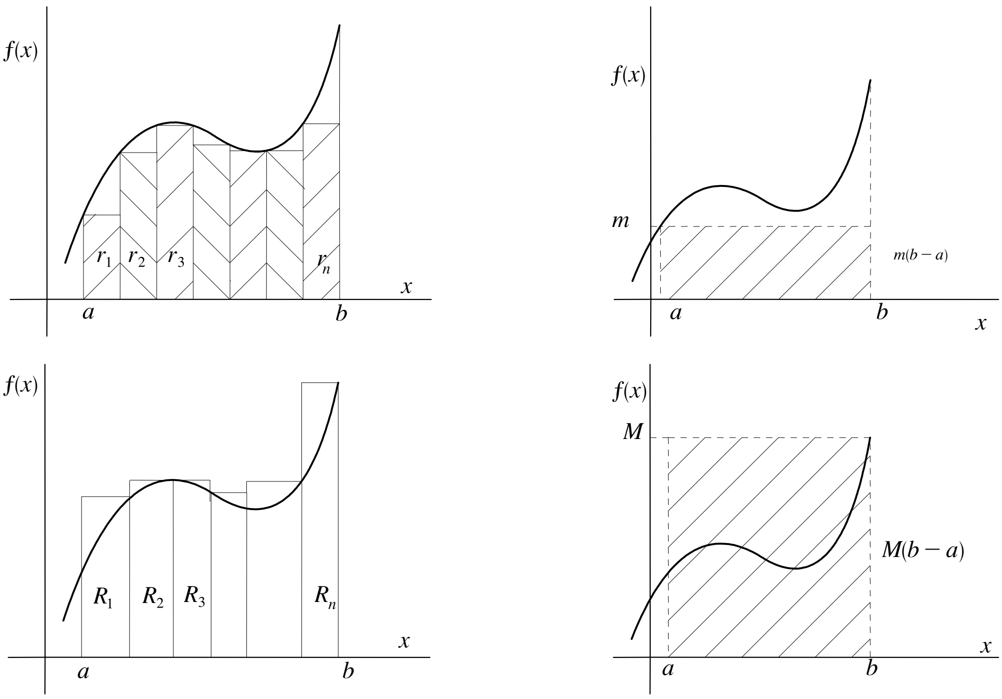
$$m \le f(m_i) \quad , \quad M \ge f(M_i).$$

Por lo tanto aplicando las propiedades de los sumatorios

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i = m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a)$$

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a).$$

Gráficamente:



□

Siguiendo con el cálculo del área del conjunto ordenado A, obsérvese que de [1] se tiene:

$$s(\Delta) \leq \text{área}(A) \leq S(\Delta).$$

La aproximación con que estiman $s(\Delta)$ y $S(\Delta)$ el área de A, depende de la partición P. Se mejora la aproximación considerando particiones con más y más subintervalos, es decir, tomando particiones cuyo diámetro Δ tiende a cero.

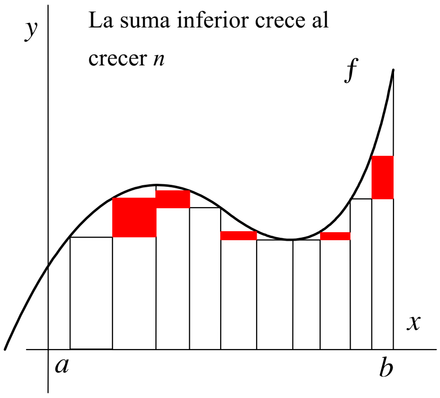
Supongamos, por ejemplo, que se divide por la mitad cada subintervalo de la partición inicial P de $[a,b]$. Se tiene entonces:

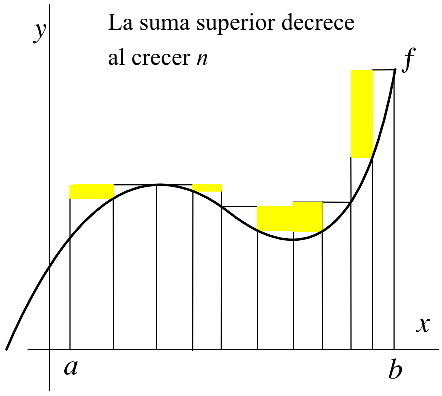
$$P' = \left\{ x_0, \frac{x_0 + x_1}{2}, x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_2, \ldots x_{n-1}, \frac{x_{n-1} + x_n}{2}, x_n \right\}$$

de diámetro $\Delta' = \dfrac{\Delta}{2}$ que determina en $[a,b]$ $2n$ subintervalos y divide al conjunto A en $2n$ subconjuntos A_i.

Comparando las particiones en n y $2n$ subintervalos, se observa que

$$s(\Delta) \leq s(\Delta') \quad \text{y} \quad S(\Delta) \geq S(\Delta').$$





La suma de las áreas de los rectángulos inscritos crece cuando se considera la partición P' y se aproxima más al verdadero valor del área de A ya que en la suma inferior asociada a P' se incluyen áreas de zonas no consideradas en $s(\Delta)$ (partes oscuras en el gráfico). Por una razón similar, decrecen las sumas superiores.

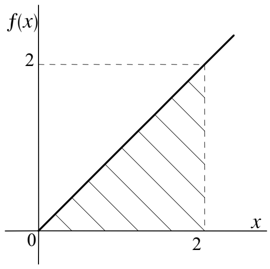
Esto sugiere que subdividiendo P', de manera que el diámetro Δ de cada una de las particiones que se van considerando tienda a cero, puede obtenerse que los límites:

$$\lim_{\Delta\to 0} s(\Delta) \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta\to 0} S(\Delta)$$

coincidan y sean iguales al valor real del área de A.

Ejemplo 3. Calcular el área del conjunto ordenado de $f(x) = x$ en el intervalo [0,2].

Solución.



La función $f(x)$ es continua en [0,2]. Dividamos el intervalo [0,2] en n subintervalos de igual longitud

$$\Delta x_i = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \qquad i = 1, ..., n.$$

Los subintervalos de la partición son de la forma $\left[\frac{2}{n}(i-1), \frac{2}{n}i\right]$, $i = 1, ..., n$ y el diámetro es $\Delta = \frac{2}{n}$.

Como $f(x) = x$ es creciente en [0,2] su valor mínimo en cada subintervalo lo alcanza en el extremo inferior del mismo y su valor máximo en el extremo superior. Por lo tanto,

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}(i-1)\frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} i \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\,.$$

Teniendo en cuenta las fórmulas de las sumas (progresiones aritméticas):

$$s(\Delta) = \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{4}{n^2}n = \frac{2(n+1)}{n} - \frac{4}{n} \quad ; \quad S(\Delta) = \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{n}\,.$$

Tomando límites cuando el diámetro de la partición tiende a cero, es decir, $n \to \infty$, resulta

$$\lim_{\Delta\to 0} s(\Delta) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)}{n} - \frac{4}{n}\right) = 2 \quad ; \quad \lim_{\Delta\to 0} S(\Delta) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+1)}{n}\right) = 2\,.$$

Consideremos ahora la suma $I(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$ asociada a una partición P de diámetro Δ, donde C_i es un elemento cualquiera perteneciente al intervalo i-ésimo de dicha partición. En el caso de la función $f(x) = x$ en [0,2], tomando como C_i el punto medio de cada subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ se tiene:

$$I(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{2(i-1)}{n} + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i-2}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = = \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^2}n = \frac{2(n+1)}{n} - \frac{2}{n}.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ (es decir, $\Delta \to 0$) se verifica

$$\lim_{\Delta \to 0} I(\Delta) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{2(n+1)}{n} - \frac{2}{n}\right) = 2$$

Este valor 2 es, precisamente el área del conjunto ordenado de $f(x) = x$ en [0,2] ya que, dicho conjunto es un triángulo y por consiguiente su área es:

$$\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

La suma

$$I(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$$

se denomina *suma intermedia* o *suma integral*. Trivialmente se puede comprobar que para cada partición *P*, de diámetro Δ se verifica:

$$s(\Delta) \leq I(\Delta) \leq S(\Delta) \qquad [2]$$

A partir de estas sumas intermedias se establece la definición de integral definida como sigue:

Definición 1. *Sea f definida y acotada en el intervalo cerrado* $[a,b]$ *y sea* C_i *un punto del subintervalo i-ésimo* $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ *de anchura* Δx_i *de una partición P con diámetro* Δ. *Entonces si el límite de las sumas intermedias*

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$$

existe, denotaremos este límite por

$$\int_a^b f(x)dx$$

y lo llamaremos la integral definida de f entre a y b. En este caso se dice que f es integrable en $[a,b]$ *y se escribirá:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i .$$

Teniendo en cuenta [2], puede afirmarse también que *f* es integrable en $[a,b]$ si

$$\lim_{\Delta \to 0} s(\Delta) = \lim_{\Delta \to 0} S(\Delta)$$

y el valor de este límite es precisamente, la integral definida de *f* en $[a,b]$.

Los elementos que aparecen en la notación de integral definida son:

$$\int_a^b f(x)dx$$

a …… límite inferior de la integral

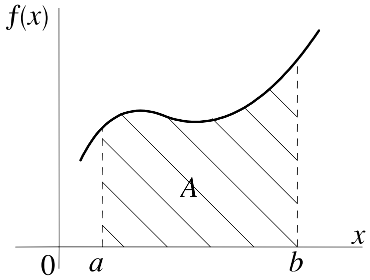
b ….. límite superior de la integral

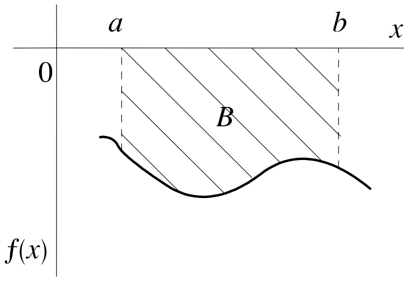
x……………variable de la integral

$[a,b]$ …… intervalo de integración

$f(x)$ …………………… integrando

Esta expresión denota el *área* del conjunto ordenado de f en $[a,b]$





$$\int_a^b f(x)dx = \text{área } (A) \qquad\qquad \int_a^b f(x)dx = -\text{ área } (B)$$

En el desarrollo efectuado en esta sección se ha considerado que f es una función continua en $[a,b]$, sin embargo esta condición no se impone en la definición de integral definida. La continuidad de la función no es una condición necesaria para su integrabilidad, de hecho existen, como se verá después, funciones discontinuas pero integrables.

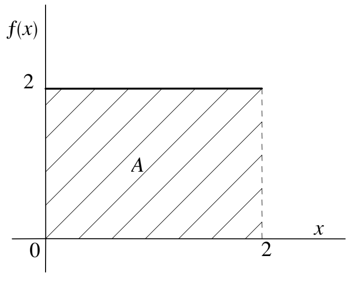
Con algunas pequeñas modificaciones, el desarrollo que nos ha conducido a la definición de integral definida, es válido cuando f es simplemente una función *acotada* en $[a,b]$. Así, una pregunta que surge de manera natural es: *¿Qué funciones son integrables?*

Una condición suficiente de integrabilidad la da el siguiente teorema.

Teorema 1. *Si f es continua en* $[a,b]$, *entonces f es integrable en* $[a,b]$.

Ejemplo 4. Calcular la integral definida de $f(x) = 2$ en $[0,2]$.

Solución.



Por ser $f(x) = 2$ continua en $[0,2]$, sabemos que es integrable y su integral definida es el área del conjunto A.

$$\int_0^2 2\,dx = \text{área}(A)$$

Se considera una partición del intervalo [0,2] en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{2}{n}$ de la forma:

$$\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \qquad i = 1, ..., n$$

La suma intermedia asociada a esta partición es:

$$I(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{2}\left[\frac{2(i-1)}{n} + \frac{2i}{n}\right]\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 2\frac{2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 4 = \frac{1}{n}4n = 4$$

Tomando límite cuando $\Delta = \frac{2}{n} \to 0$, o lo que es lo mismo, cuando $n \to \infty$, se obtiene:

$$\lim_{\Delta \to 0} I(\Delta) = \lim_{n \to \infty} 4 = 4$$

Así pues:

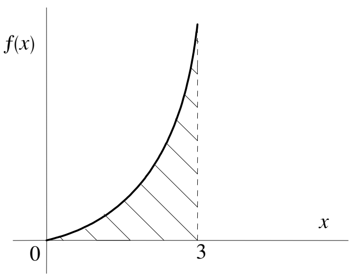
$$\int_0^2 2dx = 4$$

Este resultado también se puede obtener geométricamente:

área (A) = largo · ancho = 2 · 2 = 4

Ejemplo 5. Calcular $\int_0^3 x^2 dx$.

Solución.



Se considera una partición de [0,3] en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{3}{n}$ de la forma:

$$\left[\frac{3(i-1)}{n},\ \frac{3i}{n}\right] \qquad i = 1, ..., n$$

Como $f(x) = x^2$ es continua y estrictamente creciente en [0,3] alcanza su valor mínimo en cada subintervalo de la partición en el extremo inferior del mismo, y el máximo en el superior. Teniendo esto en cuenta, calculamos la suma inferior y superior asociadas a la partición:

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3(i-1)}{n}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{n^2}(i-1)^2 \frac{3}{n} = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{n^2} i^2 \frac{3}{n} = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

de donde

$$s(\Delta) = \frac{27}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right] = \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right] = \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} - \frac{27(n+1)}{n^2} + \frac{27}{n^2}$$

$$S(\Delta) = \frac{27}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} .$$

Tomando límites cuando el diámetro de la partición tiende a cero, o lo que es equivalente en este caso, cuando $n \to \infty$, se obtiene

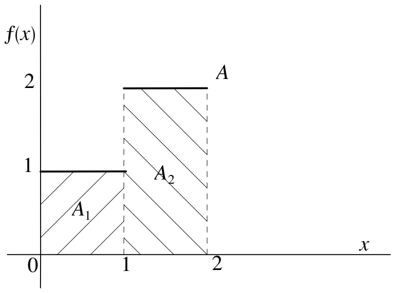
$$\lim_{\Delta \to 0} s(\Delta) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} - \frac{27(n+1)}{n^2} + \frac{27}{n^2}\right) = 9$$

$$\lim_{\Delta \to 0} S(\Delta) = \lim_{n \to \infty} \frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2} = 9 .$$

Como ambos límites coinciden, existe $\int_0^3 x^2 dx$ y es igual a 9.

Ejemplo 6. Calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$ de la función $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 2 & 1<x\le 2\end{cases}$.

Solución.



A diferencia de los ejemplos anteriores en principio no se sabe si f es integrable en [0,2], ya que no es continua en dicho intervalo.
Consideremos también en este caso una partición de [0,2] en n subintervalos iguales de longitud $\Delta x=\dfrac{2}{n}$.

La suma intermedia es

$$I(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\frac{2}{n}=\sum_{i=1}^{n/2}1\frac{2}{n}+\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n/2}2\frac{2}{n}$$

ya que

$$C_i\in[0,1] \quad \text{cuando} \quad i=1,\ .....,\ \frac{n}{2}$$

y

$$C_i\in[1,2] \quad \text{cuando} \quad i=\frac{n}{2}+1,\ .....,\ n.$$

Así pues

$$I(\Delta)=\frac{2}{n}\frac{n}{2}+\frac{4}{n}\left(n-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1\right)=1+\frac{4}{n}\frac{n}{2}=1+2=3\,.$$

Tomando límites cuando $n\to\infty$

$$\lim_{\Delta\to 0} I(\Delta)=\lim_{\Delta\to 0}3=3\,.$$

Por tanto, existe la integral definida de $f(x)$ en [0,2] y su valor es 3. Es decir

$$\int_0^2 f(x)\,dx=3.$$

Esto está de acuerdo con el resultado que se obtiene si se calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje OX en el intervalo [0,2]:

$$\text{área }(A)=\text{área }(A_1)+\text{área }(A_2)=1\cdot 1+1\cdot 2=3.$$

Este es un ejemplo de una función que no es continua en el intervalo pero sí es integrable.

Ejemplo 7. Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$ donde $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0 & x\in[0,1] \text{ y es irracional}\end{cases}$.

Solución. Esta función, en principio, no se sabe si es integrable en [0,1] pues presenta infinitas discontinuidades en dicho intervalo. Se considera una partición $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ cualquiera de [0,1] de diámetro $\Delta=\max\ \{|x_i-x_{i-1}|\quad i=1,\dots,n\}$. Dado que cada subintervalo de la partición contiene un número irracional, el mínimo valor de f en cada subintervalo es 0. Del mismo modo, en cada subintervalo hay un número racional, por lo que el máximo valor de f en cada subintervalo es 1. Así

$$s(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0 \quad ; \quad S(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=1$$

y tomando límites cuando el diámetro de la partición tiende a cero, se obtiene

$$\lim_{\Delta\to 0} s(\Delta)=\lim_{\Delta\to 0}0=0 \quad ; \quad \lim_{\Delta\to 0} S(\Delta)=\lim_{\Delta\to 0}1=1\,.$$

Como estos límites no coinciden, no existe $\int_0^1 f(x)\,dx$, es decir, f no es integrable-Riemman en [0,1].

Este es un ejemplo de una función que no es continua en el intervalo considerado y tampoco es integrable, aunque sí es acotada en [0,1].

Puesto que no todas las funciones son integrables, es lógico preguntarse qué funciones además de las continuas en un intervalo $[a,b]$, son tales que existe $\int_a^b f(x)\,dx$. La respuesta a esta cuestión se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ una función:*

1) *Si f es monótona, entonces es integrable.*
2) *Si f es continua, entonces es integrable.*
3) *Si f es continua en $[a,b] - F$, con F un conjunto finito de puntos de $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.*

3. Propiedades de la integral definida

Proposición 1. *Sean f y g dos funciones integrables en* $[a,b]$, *entonces se verifica que:*

(a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ *y* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(b) Linealidad.

- $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ *para todo* $k \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Demostración. La demostración del punto (a) es inmediata. Respecto al punto (b) comprobamos que se cumple la segunda igualdad (la demostración de la primera es análoga).

Por ser f y g integrables en $[a,b]$, se verifica, de acuerdo con la definición

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0} I_f(\Delta) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0} I_g(\Delta) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(C_i)\Delta x_i\,.$$

Para cada partición P de $[a,b]$ con diámetro Δ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(C_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left[f(C_i)+g(C_i)\right]\Delta x_i$$

así pues,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i + \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(C_i)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(C_i)\Delta x_i\right) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[f(C_i)+g(C_i)\right]\Delta x_i == \int_a^b [f(x)+g(x)]dx$$

y, por tanto, $f + g$ es también integrable en $[a,b]$. □

A partir de estas propiedades se deduce:

- La suma de funciones integrables en un intervalo $[a,b]$ es otra función integrable en dicho intervalo.
- El producto de una función integrable en $[a,b]$ por una constante, es una función integrable en el mismo intervalo.

Puede afirmarse entonces, que el conjunto de todas las funciones integrables en un intervalo $[a,b]$ es un espacio vectorial.

Proposición 2.

(a) Toda función constante en un intervalo $[a,b]$ *es integrable, verificándose:*

$$\textit{Si para todo } x,\ f(x) = C, \textit{ entonces } \int_a^b C dx = C(b-a).$$

(b) Sea f integrable en $[a,b]$, *se verifica que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \textit{con } c \in (a,b).$$

(c) Invariancia frente a traslaciones.

Si f es integrable en $[a,b]$, *entonces para todo* $c \in \mathbb{R}$

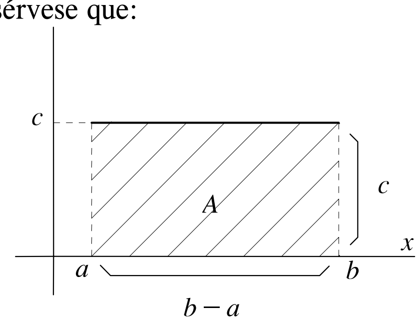
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

Demostración.

(a) La función $f(x) = C$ para todo $x \in [a,b]$ es continua y por tanto integrable en dicho intervalo. Por definición,

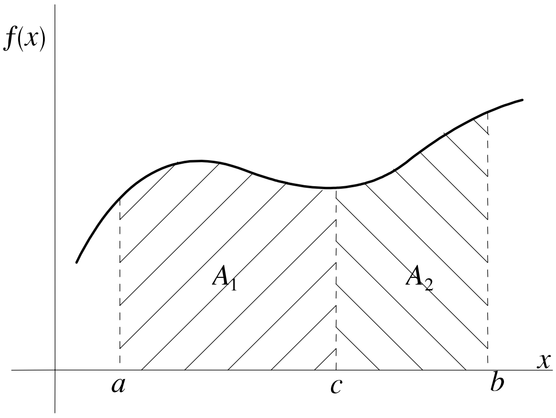
$$\int_a^b Cdx = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = \lim_{\Delta\to 0} C(b-a) = C\,(b-a)$$

Obsérvese que:



$$\int_a^b C\,dx = \text{área } (A) = C\,(b-a)$$

(b) Si f es integrable en un intervalo dado, también lo es en cualquier subintervalo contenido en el mismo. La justificación geométrica de esta propiedad es muy sencilla.



El área del conjunto $A = A_1 + A_2$ es el valor de $\int_a^b f(x)dx$. Por otra parte

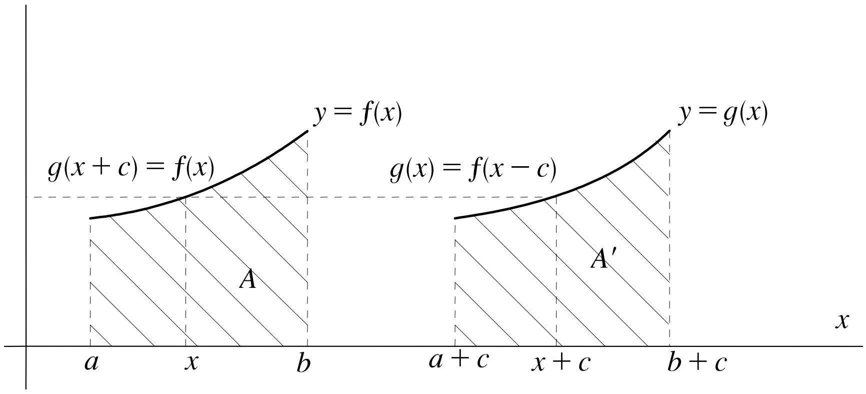
$$\text{área } (A) = \text{área}(A_1) + \text{área}(A_2),$$

siendo

$$\text{área } (A_1) = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\text{área } (A_2) = \int_c^b f(x)\,dx.$$

(c) Geométricamente esta propiedad significa lo siguiente:



$$\text{área }(A) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\text{área}(A') = \int_{a+c}^{b+c} g(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx\,.$$

y ambos conjuntos tienen el mismo área ya que $A´$ es el conjunto A desplazado. Se verifica

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,\mathrm{d}x\,.$$

□

Proposición 3. *(Propiedades de comparación)*

Sean f y g dos funciones integrales en $[a,b]$.

(i) *Si* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$ *entonces* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(ii) *Si* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$ *entonces* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(iii) *La función* $|f|(x) = |f(x)|$ *es integrable en* $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

(iv) *Sea f una función continua en* $[a,b]$, *si m y M son el mínimo y el máximo valor respectivamente de f en* $[a,b]$, *se verifica*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Demostración.

(i) Puesto que *f* es integrable en [*a,b*]: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta\to 0} I(\Delta) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(C_i)\Delta x_i\,.$

Para cada partición *P* de [*a,b*] con diámetro Δ, la suma intermedia es no negativa:

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i \geq 0$$

pues $f(C_i) \geq 0$ para todo $C_i \in [a,b]$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Así pues, la integral definida de f en $[a,b]$ será mayor o igual a cero, ya que es el límite de cantidades no negativas.

(ii) Sea $h(x) = g(x) - f(x)$, aplicando la propiedad (b) se obtiene la integrabilidad de h en $[a,b]$. Por otra parte, como $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, la función h verifica $h(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Aplicando (i) se tiene

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0.$$

Teniendo en cuenta la linealidad de la integral definida

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx .$$

De ambas expresiones se deduce que

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx .$$

(iii) La integrabilidad de la función $|f|(x) = |f(x)|$ puede comprobarse sin dificultad a partir de la definición.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Teniendo en cuenta la integrabilidad de f y $|f|$ (y por tanto, de $-|f|$) y el apartado anterior, se verifica

$$\int_a^b (-|f(x)|)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

o lo que es igual

$$-\int_a^b (|f(x)|)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

que, por la definición de valor absoluto, es equivalente a

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx .$$

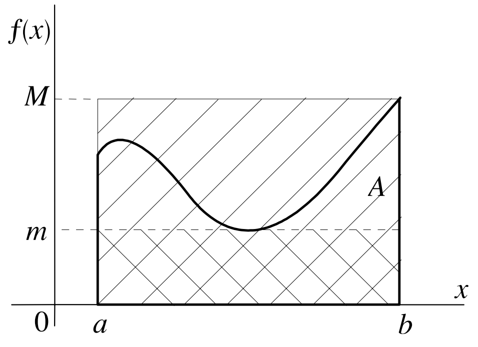
(iv) Por ser m y M los valores mínimo y máximo de f en $[a,b]$ se verifica $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Las funciones constantes $g_1(x) = m$ y $g_2(x) = M$ son integrables pues son continuas. Aplicando (ii)

$$\int_a^b m dx \;\le\; \int_a^b f(x)dx \;\le\; \int_a^b M dx$$

y a partir de la propiedad (c) se obtiene

$$m(b\text{-}a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b\text{-}a).$$

Gráficamente esto significa:



La desigualdad es equivalente a

área (r) ≤ área (A) ≤ área (R)

donde r es el rectángulo inscrito en el conjunto A, de base el intervalo $[a,b]$ y de altura m, y R es el rectángulo circunscrito al conjunto A, de igual base que el anterior y altura M.

□

Observación. Obsérvese también, que en las propiedades de las sumas inferiores y superiores ya se obtenían los valores $m(b–a)$ y $M(b–a)$ como cota inferior y superior, respectivamente, de dichas sumas.

Teorema 2. *(Teorema del valor medio)*

Sea f una función continua definida en $[a,b]$. *Entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)dx \;= f(c)\,(b–a).$$

Demostración. Sean m y M el mínimo y el máximo de f en $[a,b]$ (existen por ser f continua en dicho intervalo). Dividiendo en la desigualdad de la propiedad anterior (iv) por $(b–a)$ se tiene

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \;\le M.$$

Por el teorema del valor intermedio se verifica que existe $c \in [a,b]$ tal que

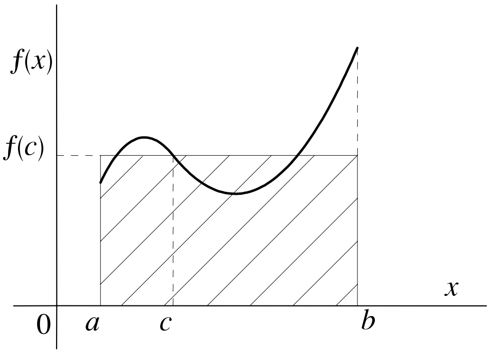
$$m \le f(c) \le M$$

luego

$$f(c) \;=\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

y de aquí se deduce: $\int_a^b f(x)dx \;= f(c)\,(b–a).$

Gráficamente esto significa:

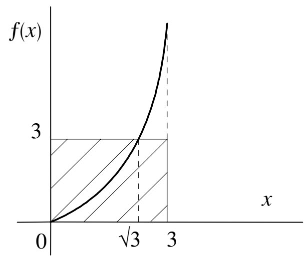


Si $f(x)$ es positiva $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región comprendida entre $[a,b]$ y el gráfico de f. El teorema del valor medio afirma entonces que hay un rectángulo de base $[a,b]$ y altura $f(c)$, cuya área coincide con la de la región, para un cierto $c \in [a,b]$.

□

Ejemplo.8. Encontrar para que valor de $c \in [0,3]$ se verifica el teorema del valor medio para la integral de la función $f(x) = x^2$.

Solución.



En un ejemplo resuelto anteriormente se obtuvo:

$$\int_0^3 x^2 dx = 9.$$

Teniendo en cuenta el teorema del valor medio

$$\frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2 dx = f(c) = c^2$$

es decir, $c^2 = \dfrac{9}{3} = 3$ y, por tanto $c = \sqrt{3}$.

4. La integral como función del intervalo: función integral

Dada una función f definida en $[a,\ b]$, una vez comprobada su integrabilidad en el intervalo $[a,b]$, el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ coincide con el área del conjunto ordenado de f. Ahora bien, si f es integrable en $[a,b]$ también lo es en cualquier subintervalo $[a,t]$ donde t es cualquier valor comprendido entre a y b, por tanto puede calcularse para cada t del intervalo $[a,b]$ la integral de f en $[a,t]$.

Obviamente,

$$\int_a^t f(x)\,dx$$

tomará valores distintos dependiendo del valor que tome t, así puede definirse una función F en el intervalo $[a,b]$ con valores en $\mathbb{R}$ de tal forma que a cada t le haga corresponder el valor del área del conjunto ordenado de f en $[a,t]$.

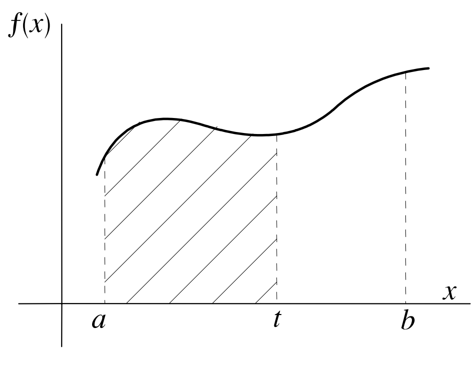
Esta función F se denomina función integral. La definición formal es la siguiente:

Definición 2. *Sea f función integrable en $[a,b]$. Se define la función*

$$F:[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$t\ \to F(t)=\int_a^t f(x)dx$$

A la función F se le denomina función integral de f en $[a,\ b]$.

Gráficamente, el significado de esta función es:



$F(t)$ es el valor del área del conjunto rayado (siempre que f sea una función no negativa).

Esta función tiene importantes propiedades que nos permitirán encontrar una forma más sencilla de calcular integrales definidas a partir de la relación, que veremos que existe, entre el concepto de derivada y el concepto de integral.

Es evidente que si f es una función integrable en el intervalo [a,b], existe, como ya se indicó, su función integral y además es única, pues la integral de f en [a,t] es el área del conjunto ordenado de f en [a,t] y el área de un conjunto es única.

Teorema 3. *(Primer teorema fundamental del cálculo integral)*

Sea f definida, acotada e integrable en $[a,b]$. *Sea* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ *su función integral definida por:*

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \ \ \textit{para todo}\ \ t\in[a,b].$$

Entonces,

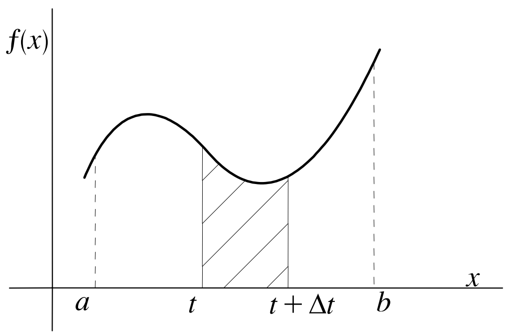
(i) $F(t)$ *es continua para todo* $t\in[a,b]$.

(ii) *Si f es continua en* $t_0\in[a,b]$, *la función integral F es derivable en* t_0 *y se verifica y* $F'(t_0)=f(t_0)$.

La segunda parte del Teorema 3, nos permite entonces afirmar, que si f es continua en [a,b], la función integral F es derivable en [a,b] y se verifica

$$F'(x)=f(x) \ \ \text{para todo}\ \ x\in[a,b].$$

En efecto, sin pérdida de generalidad puede suponerse que f es no negativa en [a,b].



El área del conjunto rayado es

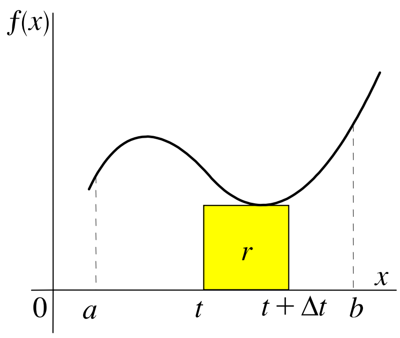
$$\Delta F=F(t+\Delta t)-F(t)$$

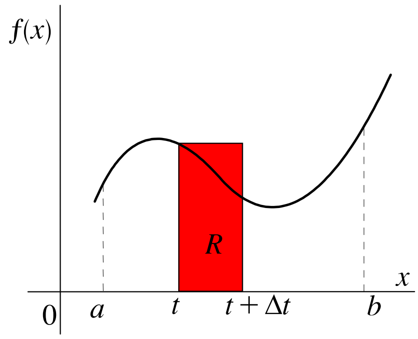
ya que por la propiedad de aditividad con $\Delta t>0$, se tiene que:

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_a^{t+\Delta t}f(x)dx-\int_a^t f(x)dx=\int_a^t f(x)dx+\int_t^{t+\Delta t}f(x)dx-\int_a^t f(x)dx=\int_t^{t+\Delta t}f(x)dx$$

que teniendo en cuenta el significado de la integral definida, es precisamente el área del conjunto rayado.

El valor de esta área está comprendido entre los valores de las superficies de los rectángulos r y R.





Es decir,

$$f(m)\Delta t \leq \Delta F \leq f(M)\Delta t$$

donde

$$f(m) = \text{ mínimo valor de } f \text{ en } [t, t+\Delta t]$$

$$f(M) = \text{ máximo valor de } f \text{ en } [t, t+\Delta t]$$

y ambos existen ya que f es continua en $[t, t+\Delta t]$.

De $f(m)\Delta t \leq \Delta F \leq f(M)\Delta t$ se obtiene

$$f(m) \leq \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \leq f(M).$$

Por ser f continua, cuando $\Delta t \to 0^+$, $f(m)$ y $f(M)$ tienden a $f(t)$, así pues, tomando límites en la expresión precedente cuando t tiende a cero por la derecha

$$f(t) \leq \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \leq f(t)$$

$$f(t) = F'_+(t).$$

Procediendo de manera análoga para $\Delta F = F(t) - F(t-\Delta t)$ se obtiene $f(t) = F'_-(t)$. Por tanto, finalmente para todo $t \in [a,b]$ se obtiene $f(t) = F'(t)$. □

Basándonos en este teorema, enunciamos el segundo teorema fundamental del cálculo integral, que nos ofrece un método más sencillo para obtener el valor de la integral definida de una función continua.

Teorema 4. *(Segundo teorema fundamental del cálculo integral)*

Sea G una función diferenciable en $[a,b]$ y su derivada $G' = f$ una función continua e integrable en $[a,b]$. Entonces la función f es integrable en $[a,b]$ y su integral es

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad \textit{(Regla de Barrow)}.$$

Nota. Usualmente se denota: $\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$.

Demostración. Como f es continua en $[a,b]$ es integrable y su función integral F(t) es derivable en $[a, b]$, de acuerdo con el teorema 3, se verifica

$$F'(t) = \left(\int_a^t f(x)dx \right)' = f(t) = G'(t) \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Como F y G son derivables en todo punto $t \in [a,b]$ y $F'(t)=G'(t)$ existirá una constante K tal que

$$F(t) = G(t) + K \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Además $F(a)=0$, por tanto $K=-G(a)$. Finalmente se obtiene el resultado ya que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) - G(a)$$

□

5. Función primitiva

Los teoremas fundamentales del cálculo nos ofrecen una forma más “sencilla” de calcular la integral definida de una función continua *f*. Para obtener el valor de

$$\int_a^b f(x)dx$$

bastará con encontrar una función derivable *G* cuya derivada sea *f* en [*a,b*], una vez determinada esta función, el valor de la integral definida de *f* en [*a,b*] es simplemente *G*(*b*)–*G*(*a*).

Las funciones que cumplen la condición de tener derivada igual a una función dada, se denominan primitivas. En concreto se tiene la siguiente:

Definición 3. *Sea f una función definida en* $[a,b]$ *con valores en* $\mathbb{R}$. *Se dice que F es primitiva de f en* [*a,b*] *si y sólo si para todo* $x \in [a,b]$ *se verifica*

$$F'(x) = f(x).$$

Observaciones.

(a) Teniendo en cuenta la definición anterior, si *F* es primitiva de *f* entonces es continua y derivable en [*a,b*].

(b) Si *F* es función primitiva de *f* en [*a,b*] entonces $G(x) = F(x) + K, K \in \mathbb{R}$ también lo es, ya que para todo $x \in [a,b]$

$$G'(x) = (F(x) + K)' = F'(x) = f(x)\ .$$

Por tanto, la función primitiva de *f* si existe *no es única.*

(c) Si *f* es continua en [*a,b*], teniendo en cuenta la definición anterior y el Teorema 3, se verifica que la función integral asociada a *f* es una de sus primitivas en [*a,b*]. Así pues, toda función continua, tiene una función primitiva.

Ejemplo 9.

(i) Una función primitiva de $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$ es

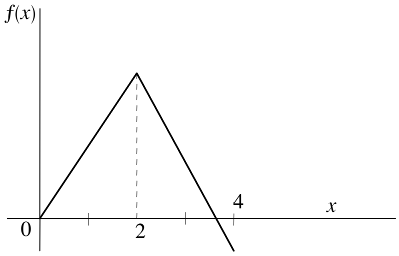
$$F_1(x) = \frac{x^3}{3}$$

ya que,

$$F'_1(x) = 3\frac{x^2}{3} = x^2 = f(x)\,.$$

También es primitiva de f la función $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2$.

(ii) La función definida por $F(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\in[0,2)\\ 10-3x & \text{si } x\in[2,4]\end{cases}$ no es primitiva de ninguna función [0,4] ya que no es derivable en $x=2$.



(iii) La función $f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x\in[0,2)\\ -3 & \text{si } x\in[2,4]\end{cases}$ no tiene función primitiva, esto es, no existe ninguna función continua y derivable en [0,4] cuya derivada coincide con *f* observar que la función *F* del ejemplo anterior no puede ser la primitiva de *f*.

En resumen, el cálculo de la integral definida de una función continua f se "reduce" (no siempre es fácil) a encontrar una de las primitivas y aplicar el Teorema 4.

(iv) Calcular la función integral de $f(x)=x^2,\ x\in[1,4]$.

La función $f(x)=x^2$ es continua ,y por tanto integrable en [1,4], existe pues, su función integral G, que por el Teorema 3 será continua y derivable. Teniendo en cuenta el Teorema 4 y el ejemplo (i)

$$G(t)=\int_1^t x^2dx = F(t)-F(1) \text{ con } F(x)=\frac{x^3}{3}.$$

Así pues, $G(t)=\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}$ es continua y derivable en [1,4] y es también una primitiva de $f(x)=x^2$.

6. Integral indefinida

Como ya se ha indicado la función primitiva (a diferencia de la función integral) si existe no es única. El conjunto de todas las funciones primitivas de una determinada función, se denomina integral indefinida de la misma. En concreto se tiene.

Definición 4. *Sea $F'(x) = f(x)$ para todo x, la familia de funciones $\{F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}\}$ se denomina integral indefinida de f y se denota por:*

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

Proposición 4. *(Propiedades de la integral indefinida)*

(i) *Si f es una función derivable, se tiene,*

$$\int f'(x)dx = f(x)+c\ .$$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$.

(iii) *Linealidad*

$$*\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx\ .$$

$$*\int af(x)dx = a\int f(x)dx \qquad \textit{para todo } a\in\mathbb{R}$$

(iv) *La diferencial de* $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ *viene dada por:* $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)dx = f(x)dx$.

La demostración de estas cuatro propiedades es inmediata, basta con aplicar la definición de integral indefinida.

El proceso del cálculo de las primitivas de una función f se denomina *integración* de f y es el proceso "inverso" a la derivación, como puede observarse a partir de las propiedades (a) y (b).

Los procesos de calcular primitivas y derivadas difieren en dos aspectos importantes. En primer lugar, algunas funciones elementales no tienen primitiva elemental, como por ejemplo $f(x) = e^{x^2}$. En segundo lugar, un ligero cambio en la forma del integrando puede ocasionar un fuerte cambio en la primitiva, por ejemplo:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,x + c \ \ ; \ \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c.$$

Algunas integrales indefinidas de funciones de uso frecuente son (siendo f una función derivable):

$$a)\quad \int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{si } n \neq -1$$

$$b)\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

$$c)\quad \int f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}dx = \mathrm{e}^{f(x)} + c$$

$$d)\quad \int f'(x)\operatorname{sen}[f(x)]dx = -\cos[f(x)] + c$$

$$e)\quad \int f'(x)\cos[f(x)]dx = \operatorname{sen}[f(x)] + c$$

$$f)\quad \int f'(x)\sec^2[f(x)]dx = \operatorname{tg}[f(x)] + c$$

$$g)\quad \int f'(x)\operatorname{cosec}^2[f(x)]dx = -\operatorname{ctg}[f(x)] + c$$

$$h)\quad \int \frac{f'(x)}{a^2 + f(x)^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left[\frac{f(x)}{a}\right] + c$$

$$i)\quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - f(x)^2}}dx = \operatorname{arcsen}\left[\frac{f(x)}{a}\right] + c$$

$$j)\quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2 + a^2}}dx = \ln\left|f(x) + \sqrt{f(x)^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$k)\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)^2 - a^2}dx = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{f(x)-a}{f(x)+a}\right| + c$$

La demostración de estas once expresiones es inmediata, basta con derivar en el segundo miembro de cada una de ellas, respecto a x y comprobar que dichas derivadas coinciden con la función integrando.

Por ejemplo, para e):

$$(-\cos[f(x)] + c)' = -(\cos[f(x)] + c)' == -(-f'(x)\operatorname{sen}[f(x)]) = f'(x)\operatorname{sen}[f(x)] .$$

Evidentemente, existen otras muchas funciones que tienen primitiva, aunque puede no ser fácil encontrarla. Estudiaremos más adelante métodos para encontrar una función primitiva de una función.

Ejemplo 10.

(i) Calcular $\int_0^3 (2x-5)x\,dx$.

Por las propiedades de linealidad de la integral definida

$$\int_0^3 (2x^2 - 5x)dx = \int_0^3 2x^2 dx - \int_0^3 5x\,dx = 2\int_0^3 x^2 dx - 5\int_0^3 x\,dx .$$

Las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x$ son continuas en [0,3], por tanto tienen función primitiva. De acuerdo con la expresión primera de la tabla anterior, se verifica:

$$\int x^2\,dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+c_1=\frac{x^3}{3}+c_1 \quad ; \quad \int x\,dx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+c_2=\frac{x^2}{2}+c_2$$

Finalmente, teniendo en cuenta el Teorema 4

$$\int_0^3 (2x^2-5x)\,dx=2\left(\frac{x^3}{3}+c_1\right)\Bigg|_0^3-5\left(\frac{x^2}{2}+c_2\right)\Bigg|_0^3=-\frac{9}{2}.$$

(ii) Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/4}(1-\operatorname{tg}x)\,dx$.

$$\int_0^{\pi/4}(1-\operatorname{tg}x)\,dx=\int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)dx=\int_0^{\pi/4}dx-\int_0^{\pi/4}\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}\,dx.$$

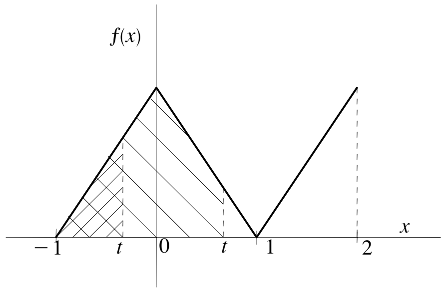
La función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$ es continua en $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, tiene por tanto función primitiva que calcularemos con ayuda de la tabla de integrales indefinidas.

$$\int\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx \quad \text{donde } g(x)=\cos x$$

así pues, a partir de la segunda expresión de la tabla precedente

$$\int_0^{\pi/4}(1-\operatorname{tg}x)\,dx=x\Big|_0^{\pi/4}+\ln(\cos x)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}+\ln(\cos\frac{\pi}{4})-\ln(\cos 0)=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(iii) Calcular la función integral de $f(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x\le 0\\ 1-x & 0\le x\le 1\\ x-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$ en el intervalo [-1,2].



f es continua en [-1,2], pero no es derivable en todo el intervalo.

f no tiene derivada en x=0 y x=1.

La función integral es $F(t)=\displaystyle\int_{-1}^{t} f(x)\,dx$.

– Si $t\in[-1,0]$: $F(t)=\displaystyle\int_{-1}^{t}(1+x)\,dx=\int_{-1}^{t}1\,dx+\int_{-1}^{t}x\,dx=x\Big|_{-1}^{t}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{t}=t+1+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{t^2}{2}+t+\frac{1}{2}$.

La expresión $\dfrac{t^2}{2}+t+\dfrac{1}{2}$ nos da el valor del área situada bajo la gráfica de f cuando x varía de –1 a t.

– Si $t\in[0,1]$, aplicando la propiedad de aditividad de la integral definida:

$$F(t)=\int_{-1}^{t}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{-1}^{t}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(1+x)\,dx+\int_{0}^{t}(1-x)\,dx=\int_{-1}^{0}(1+x)\,dx+\int_0^t dx-\int_0^t x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}+x\Big|_0^t-\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}+\left(t-\frac{t^2}{2}\right)$$

La expresión $\dfrac{1}{2}+\left(t-\dfrac{t^2}{2}\right)$ nos da el valor del área del conjunto ordenado de f en el intervalo [-1,t] con $t\in[0,1]$.

– Si $t \in [1,2]$:

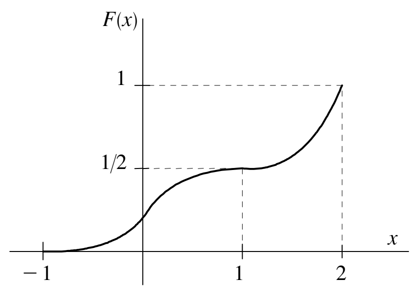
$$F(t)=\int_{-1}^{t} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{1}(1-x)dx\int_{1}^{t}(x-1)dx=\int_{-1}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{1}(1-x)dx+\int_{1}^{t}xdx-\int_{1}^{t}1dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{1}(1-x)dx+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1}^{t}-\left.x\right|_{1}^{t}=1+\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-(t-1)=\frac{t^2}{2}-t+\frac{3}{2}$$

Así pues, la función integral es

$$F(t)=\begin{cases} t^2/2+t+1/2 & si \quad -1\le t\le 0 \\ 1/2+t-t^2/2 & si \quad 0<t\le 1 \\ t^2/2-t+3/2 & si \quad 1<t\le 2. \end{cases}$$

Como ya sabemos por el Teorema 3, es continua en [-1,2] y además como f es continua en todo el intervalo, F es derivable para todo $t \in [-1,2]$. La representación gráfica de F es:



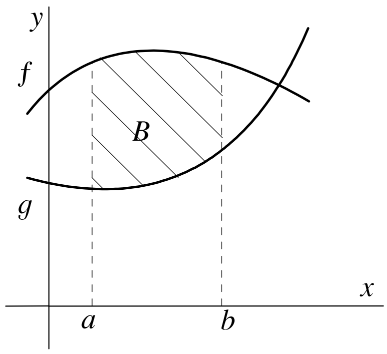
7. Aplicaciones de la integral definida: cálculo de áreas

Como ya se ha visto $\int_a^b f(x)\, dx$ representa (si f es no negativa en $[a,b]$) el área del conjunto ordenado A. Con pocas modificaciones podemos obtener el área de una región limitada por dos curvas, a partir de una integral definida adecuada.

Consideremos el conjunto del plano definido por

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}| \quad a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

donde f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y $g(x) \le f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Gráficamente B es como se indica en la siguiente figura:

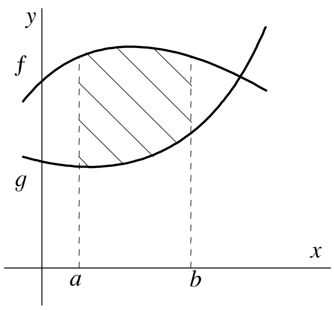


El método para calcular el área de B se indica en el siguiente:

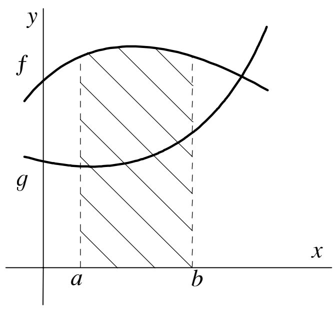
Teorema 5. *Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y $g(x) \le f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces el área de una región plana definida por*

$$\text{área}(B) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\ .$$

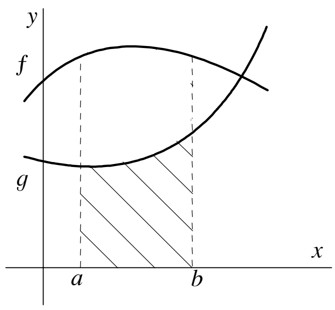
La interpretación de este resultado es:



área de la región entre f y g



área de la región bajo f

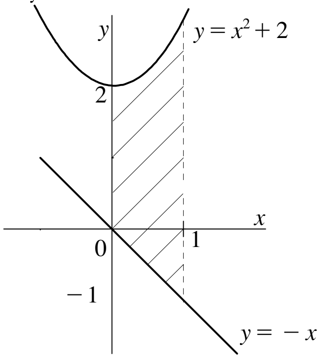


área de la región bajo g

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx \qquad = \qquad \int_a^b f(x)\, dx \qquad - \qquad \int_a^b g(x)\, dx\ .$$

Ejemplo 11.

(i) Hallar el área de la región limitada por $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.
La región cuya área ha de calcularse es de la forma:



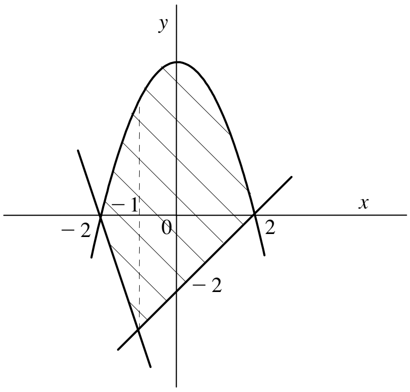
Si denotamos por $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$ entonces $g(x) \le f(x)$ para todo $x \in [0,1]$] ya que $x^2 + 2 \ge -x$ para $x \in [0,1]$ pues $x^2 + 2 + x \ge 0$ en $[0,1]$.

Aplicando el Teorema 5, tenemos:

$$\text{área}(B) = \int_0^1 \left(\left(x^2 + 2 \right) - (-x) \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx + 2\int_0^1 dx = \frac{17}{6}$$

(ii) .Hallar el área de la región comprendida entre $y = 4 - x^2$, $y = x - 2$ e $y = -3x - 6$.



La parábola $y = 4 - x^2$ tiene intersección con el eje OX en x=−2 y x=2.
Las rectas $y = x - 2$ e $y = -3x - 6$ se cortan en el punto (-1,-3) y tienen intersección con la parábola en (2,0) y (-2,0) respectivamente.
Si denotamos por $f(x) = 4 - x^2$, $g_1(x) = -3x - 6$ y $g_2(x) = x - 2$ se verifica

$$f(x) \ge g_1(x) \text{ para todo } x \in [-2,-1]$$

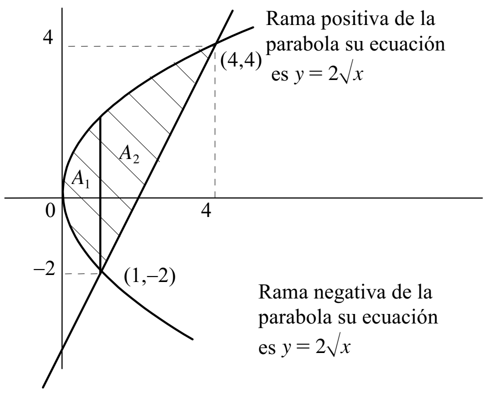
$$f(x) \ge g_2(x) \text{ para todo } x \in [-1,\ 2]$$

Por tanto el área del conjunto rayado es:

$$\int_{-2}^{-1} \left(4 - x^2 - (-3x - 6)\right) dx + \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2 - (x - 2)\right) dx = 3\int_{-2}^{-1} x dx + 10\int_{-2}^{-1} dx - \int_{-2}^{-1} x^2 dx + 6\int_{-1}^{2} dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx - \int_{-1}^{2} x dx =$$

$$= 3\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + 10x\Big|_{-2}^{-1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{-1} + 6x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = \frac{3}{2} - 6 - 10 + 20 + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 12 + 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} = 22.$$

(iii) Hallar el área de la región comprendida entre $y^2 = 4x$ e $y = 2x - 4$.



La parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$ se cortan en los puntos cuyas coordenadas son solución del sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= 4x \\ y &= 2x - 4 \end{aligned} \right\} \quad \text{sustituyendo la 1ª en la 2ª}$$

$$y^2 - 8 - 4y = 0 \quad y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \\ -2 \end{array} \right.$$

Cuando y=4 entonces x=4 y para y=−2, x=1.

Obsérvese (a partir de la figura) que:

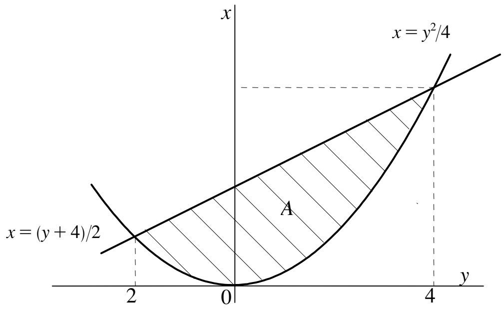
$$-2\sqrt{x} \le 2\sqrt{x} \text{ para } x \in [0,1] \ ; \ 2x - 4 \le 2\sqrt{x} \text{ para } x \in [1,4].$$

Así pues, el área está dada por la suma de las áreas de los conjuntos A_1 y A_2 , es decir,

$$\text{área} = \text{área}(A_1) + \text{área}(A_2) = \int_0^1 (2\sqrt{x} - (-2\sqrt{x}))dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - (2x - 4))dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{x} dx + 2\int_1^4 \sqrt{x} dx - 2\int_1^4 x dx + 4\int_1^4 dx = 9$$

El área de este conjunto puede hacerse con una única integral respecto a la variable y. En efecto, giremos 90º grados hacia la izquierda la figura anterior, y después efectuemos una rotación sobre el eje x de 180º. Se obtiene

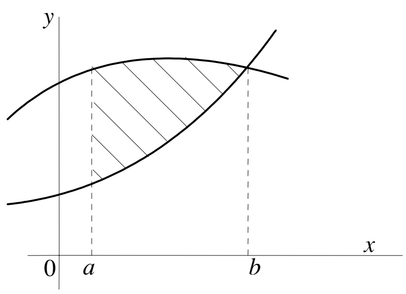


Si se denota por $g(y)=\dfrac{y^2}{4}$ y $f(y)=\dfrac{y+4}{2}$, entonces $g(y)\le f(y)$ para todo $y\in[-2,4]$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema (cambiando x por y) se obtiene:

$$\text{área}(A)=\int_{-2}^{4}\left(\frac{y+4}{2}-\frac{y^2}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(y+4)dy-\frac{1}{4}\int_{-2}^{4}y^2dy=\frac{1}{2}\frac{(y+4)^2}{2}\Bigg|_{-2}^{4}-\frac{1}{4}\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-2}^{4}=9\,.$$

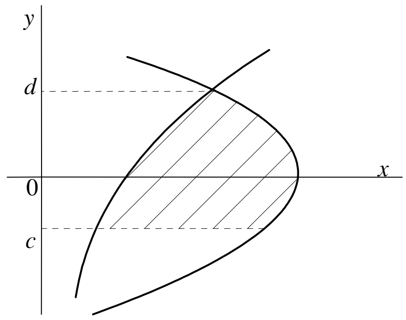
En general, para determinar el área entre curvas hay que calcular:

- Integrando en la variable x



$$\text{área}=\int_{x=a}^{x=b}(\text{curva sup.}-\text{curva inf.})dx$$

- Integrando en la variable y



$$\text{área}=\int_{y=c}^{y=d}(\text{curva der.}-\text{curva izq.})dy$$

8. Aplicaciones Económicas

(a) Obtención de una función a partir de su función marginal.

Dada una función (por ejemplo, función de coste total, *CT*, función de inversión, *I*, etc.), al derivarla obtenemos la función marginal correspondiente (por ejemplo, función de coste marginal, *CM*, función de inversión marginal, *IM*, etc.). Por el segundo teorema fundamental del cálculo integral, sabemos que el proceso de integración es el inverso del de derivación. Así pues, dada una función marginal deberíamos poder obtener, integrando, la función correspondiente.

Ejemplo 12. Sea la función $C'(q) = 8e^{2q}$ (euros por unidades producidas), donde la variable q representa la cantidad de bien producido. Para hallar la función de coste total integramos la función de coste marginal

$$C(q) = 4e^{2q} + k$$

y, como los costes fijos son de $C_F = 54$ euros, entonces $54 = C(0) = 4e^{0} + k \Leftrightarrow k = 50$ y, por tanto, $C(q) = 4e^{2q} + 50$ (euros).

(b) Inversión y formación de capital.

La formación de capital es el proceso de aumentar un stock dado de capital. Si modelamos el stock de capital como una función del tiempo, $K(t)$, y consideramos el proceso de formación de capital como un proceso continuo en el tiempo, entonces la derivada del stock de capital respecto del tiempo, dK/dt, modela la tasa de formación de capital. Ahora bien, la tasa de formación de capital en un instante t coincide con la tasa de flujo de inversión neta en dicho instante, que se denota por $I(t)$; esto es,

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t)$$

y, por tanto,

$$K(t) = \int I(t)\, dt\ .$$

Obsérvese que el capital K tiene carácter de stock, mientras que la inversión neta I tiene carácter de flujo. Esto es, $K(t)$ representa la cantidad de capital existente en cada instante t e $I(t)$ representa la tasa de inversión (neta) por periodo de tiempo en cada instante t.

Si queremos valorar la formación de capital durante un intervalo de tiempo $[a,b]$, y no sólo la trayectoria temporal de K (esto es, $K(t) = \int I(t)\, dt$), utilizaremos el concepto de integral definida de Riemann, siendo

$$\int_a^b I(t)dt = K(t)\Big|_a^b = K(b) - K(a)$$

la acumulación de capital durante el intervalo de tiempo $[a,b]$.

Obsérvese que el capital K en cada instante t es igual al capital inicial $K(0)$ más el acumulado pues

$$\int_0^t I(s)ds = K(s)\Big|_0^t = K(t) - K(0) \Rightarrow K(t) = K(0) + \int_0^t I(s)ds\ .$$

Ejemplo 13. Si el flujo de inversión neta viene descrito por la función $I(t) = 6t^{1/2}$ (cientos de euros por año) y el stock inicial es $K(0)=50$ (cientos de euros), entonces la trayectoria temporal del capital viene dada por

$$K(t) = \int I(t)\, dt = \int 6t^{1/2}dt = 4t^{3/2} + k \text{ (cientos de euros)}$$

y como $50 = K(0) = k$ (cientos de euros) tenemos que la trayectoria temporal del capital es

$$K(t) = 4t^{3/2} + 50 \text{ (cientos de euros).}$$

Ejemplo 14. Si el flujo de inversión neta viene descrito por la función $I(t) = 6t^{1/2}$ (cientos de euros por año), entonces la formación de capital durante el segundo, tercer y cuarto año, vendrá dado por la integral definida

$$\int_1^4 I(t)dt = \int_1^4 6t^{1/2}dt = 4t^{3/2}\Big|_1^4 = 32 - 4 = 28 \text{ (cientos de euros)}.$$

(c) Beneficio y flujo de beneficio.

Si modelamos el beneficio como una función del tiempo, $B(t)$, y consideramos el proceso de aumento o disminución de beneficio como un proceso continuo en el tiempo, entonces la derivada de la función beneficio respecto del tiempo, dB/dt, modela el flujo de beneficio; esto es, cómo cambia el beneficio en cada instante de tiempo. Luego, el flujo de beneficio en un instante t viene dado por la función

$$B'(t) = \frac{dB}{dt}(t)$$

y, por tanto,

$$B(t) = \int B'(t)\, dt\ .$$

Si queremos valorar el beneficio obtenido durante un intervalo de tiempo $[a,b]$, y no sólo la trayectoria temporal de B (esto es, $B(t) = \int B'(t)\,dt$), utilizaremos el concepto de integral definida de Riemann, siendo

$$\int_a^b B'(t)dt = B(t)\Big|_a^b = B(b) - B(a)$$

el beneficio obtenido durante el intervalo de tiempo $[a,b]$.

Ejemplo 15. Si el flujo de beneficio viene descrito por la función $B'(t) = 6t^2 + 2t$ (cientos de euros por año) y el beneficio inicial es $B(0)=10$ (cientos de euros), entonces la función beneficio viene dada por

$$B(t) = \int B'(t)\,dt = \int (6t^2 + 2t)\,dt = 2t^3 + t^2 + k \text{ (cientos de euros)}$$

y como $10 = K(0) = k$ (cientos de euros) tenemos que la función beneficio es

$$B(t) = 2t^3 + t^2 + 10 \text{ (cientos de euros).}$$

Ejemplo 16. Si el flujo de beneficio viene descrito por la función $B'(t) = 6t^2 + 2t$ (cientos de euros por año), entonces el beneficio durante los cinco primeros años viene dado por la integral definida

$$\int_0^5 B'(t)dt = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = (2t^3 + t^2)\Big|_0^5 = 250 + 25 = 275 \text{ (cientos de euros)}.$$

Ejercicios resueltos

1. Calcular utilizando la definición de integral de Riemann la integral de $f(x) = x - 1$ en el intervalo [0, 2].

Solución:

La función $f(x) = x - 1$ es continua en el intervalo $[0,2]$ y, por tanto, es una función integrable Riemann en dicho intervalo. Para el cálculo del valor de la integral consideramos la siguiente partición del intervalo [0,2]

$$P = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)}{n},\ 2\right\}$$

La partición *P* divide al intervalo $[0,2]$ en *n* subintervalos de longitud $\Delta x_i = \frac{2}{n}$. Además el subintervalo *i*-ésimo es de la forma $\left[\frac{2(i-1)}{n},\ \frac{2i}{n}\right]$ con $i = 1, \ldots, n$. El diámetro de la partición es $\Delta = \frac{2}{n}$, ya que todos los subintervalos tienen la misma longitud. Tomemos c_i como el punto medio de cada subintervalo. Esto es,

$$c_i = \left(\frac{2(i-1)}{n} + \frac{2i}{n}\right)\frac{1}{2} = \frac{2i}{n} - \frac{1}{n}.$$

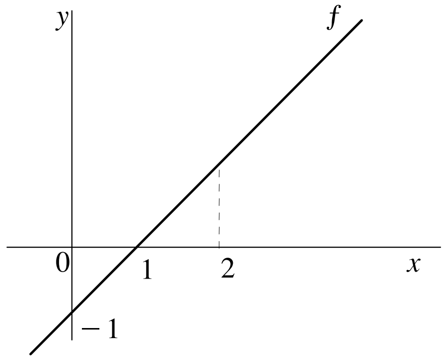
La suma intermedia para *f* asociada a esta partición es:

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n} - \frac{1}{n} - 1\right)\frac{2}{n} = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n^2} - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^2}n - \frac{2}{n}n \\ &= \frac{2(n+1)}{n} - \frac{2}{n} - 2 \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\Delta \to 0$ o equivalentemente cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\int_0^2 (x-1)dx = \lim_{\Delta \to 0} I(\Delta) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{2(n+1)}{n} - \frac{2}{n} - 2\right) = 0.$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la gráfica de *f* y la interpretación geométrica de la integral definida en términos de áreas.



2. Analizar si la función $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Q}\\ 3 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ es integrable en el intervalo [-1,1]. ¿Es *f* acotada en dicho intervalo?

Solución:

La función $f(x)$ tiene un número infinito de discontinuidades. Para ver si $f(x)$ es integrable en [-1,1] calculamos la suma superior e inferior y analizamos si sus límites coinciden. Para ello, consideramos la siguiente partición del intervalo [-1,1]

$$P=\left\{-1,\ -1+\frac{2}{n},\ -1+\frac{4}{n},\ldots,\ -1+\frac{2(n-1)}{n},\ 1\right\}$$

La partición *P* divide al intervalo [-1,1] en *n* subintervalos de longitud $\Delta x_i=\frac{2}{n}$. Como en cada subintervalo hay números racionales e irracionales, el valor máximo M_i de la función en cada subintervalo es 3 y el valor mínimo m_i es 2. Las suma inferior y superior de Riemann para f asociadas a esta partición son:

$$s(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}2\frac{2}{n}=\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{4}{n}n=4\,.$$

$$S(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}3\frac{2}{n}=\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{6}{n}n=6\,.$$

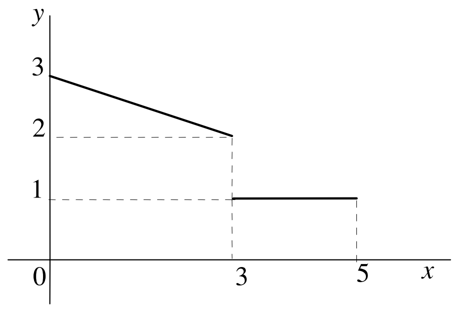
Tomando límites cuando $\Delta\to 0$ o equivalentemente cuando $n\to\infty$ se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} s(\Delta)=4\neq\lim_{n\to\infty} S(\Delta)=6$$

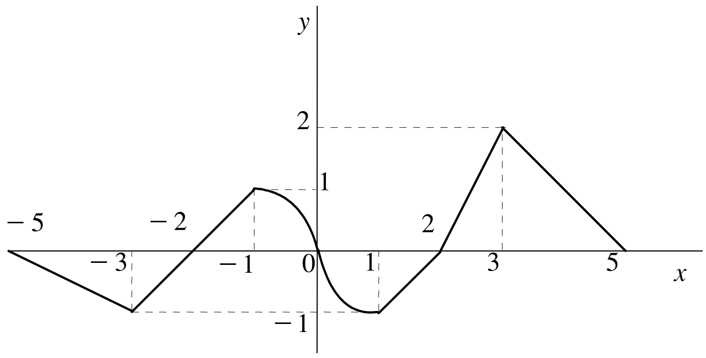
y la función $f(x)$ **no** es integrable en [-1,1] aunque **sí** es acotada en dicho intervalo.

3. Hallar el valor de la integral definida de las funciones cuyas gráficas se indican a continuación en los intervalos que se señalan:

a) $[0,5]$



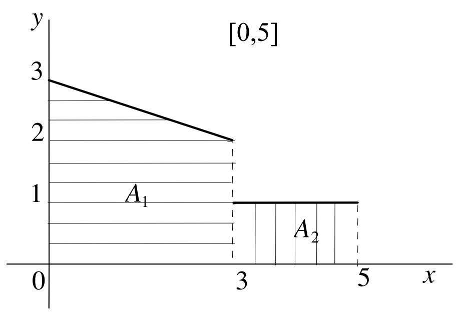
b) $[-5,5]$



Solución:

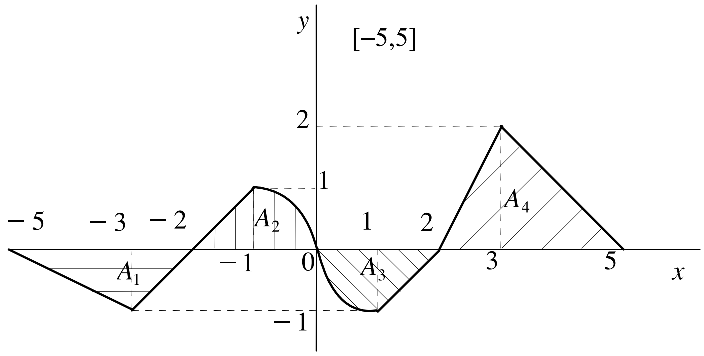
Calculamos el valor de la integral definida de las funciones propuestas usando la interpretación geométrica de la integral definida en términos de áreas.

a)



$$\int_0^5 f(x)dx = A_1 + A_2 = \frac{15}{2} + 2 = \frac{19}{2}\,.$$

b)



$$\int_{-5}^{5} f(x)dx = -A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = -A_1 + A_4 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}.$$

4. Dada la función $f(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le 1 \\ t+2 & 1 < t \le 3 \end{cases}$, se pide:

a) Calcular la función integral F de la función f en el intervalo [0,3].

b) ¿Es continua F en [0,3]?

c) ¿Es derivable F en [0,3]?

d) ¿La función f tiene función primitiva?

Solución:

a) La función f es integrable en [0,3] ya que es continua en [0,3] salvo en el punto t=1. Por tanto, la función integral de f existe.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} \int_0^x 2tdt = x^2 & 0 \le x \le 1 \\ \int_0^1 2tdt + \int_1^x (t+2)dt = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

Así pues,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

b) La función integral siempre es continua en el intervalo en el que está definida. Es claro que

$$1 = \lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} \right) = \lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 = F(1).$$

c) La función integral F es derivable en todos los puntos en los que es continua la función $f(t)$. Así pues, F es derivable para todo $x \in [0,3]$ con $x \neq 1$. En efecto

$$F'_-(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{F(1+\Delta x) - F(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2$$

$$F'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{F(1+\Delta x) - F(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{(1+\Delta x)^2}{2} + 2(1+\Delta x) - \frac{3}{2} - 1}{\Delta x} = 3\,.$$

Como $F'_+(1) \neq F'_-(1)$ la función F no es derivable en $x = 1$.

d) La función f no tiene primitiva en [0,3].

5. Dada la función $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ t^2 & 1 < t \le 2 \\ t+2 & 2 < t \le 4 \end{cases}$, se pide:

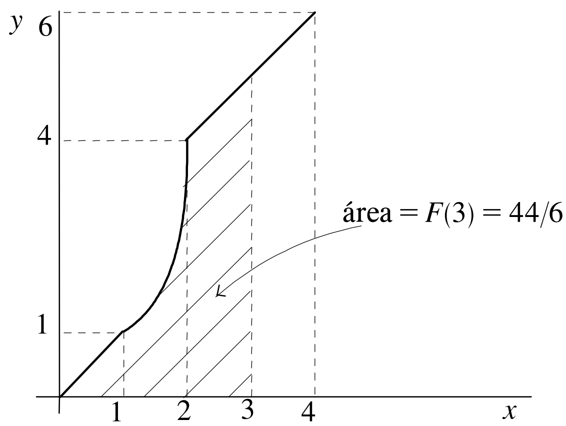
a) Calcular la función integral F de la función f en el intervalo [0,4].

b) Calcular $F(½), F(2), F(3), F(4)$.

c) ¿Es derivable F en [0,4]?

Solución:

Representamos gráficamente la función f:



a) La función integral de f es continua y derivable en [0,4] por ser f una función continua en dicho intervalo:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x tdt=\frac{x^2}{2} & 0\le x\le 1\\ \displaystyle\int_0^1 tdt+\int_1^x t^2dt=\frac{1}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3} & 1<x\le 2\\ \displaystyle\int_0^1 tdt+\int_1^2 t^2dt+\int_2^x (t+2)dt=\frac{17}{6}+\frac{(x+2)^2}{2}-8 & 2<x\le 4\end{cases}$$

Por tanto

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & 0\le x\le 1\\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{6} & 1<x\le 2\\ \dfrac{(x+2)^2}{2}-\dfrac{31}{6} & 2<x\le 4\end{cases}.$$

b) $F\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}=\dfrac{1}{8}$ ya que $\frac{1}{2}\in[0,1]$.

$F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\dfrac{(2)^3}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{17}{6}$ ya que $2\in(1,2]$.

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\dfrac{(3+2)^2}{2}-\dfrac{31}{6}=\dfrac{44}{6}$ ya que $3\in(2,4]$.

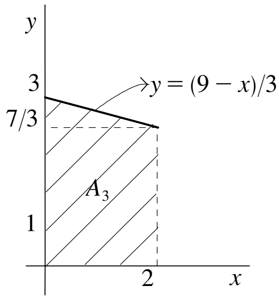
$F(4)=\int_0^4 f(t)dt=\dfrac{(4+2)^2}{2}-\dfrac{31}{6}=\dfrac{77}{6}$ ya que $4\in(2,4]$.

c) La función F es derivable en $[0,4]$ y su derivada es la función f. De hecho, F es una función primitiva de f.

6. Para las funciones cuyas gráficas se indican en el ejercicio 3 hallar para la primera el valor de su función integral en los puntos 0, 2, 3, y 5 y para la segunda el valor de su función integral en los puntos -3, -1, 2 y 5.

Solución:

a) Las regiones con áreas A_1 y A_2 están representadas en las soluciones del ejercicio 3 a).



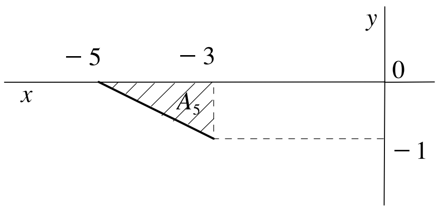
$$F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$$

$$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=A_1=\frac{15}{2}$$

$$F(5)=\int_0^5 f(t)dt=A_1+A_2=\frac{15}{2}+2=\frac{19}{2}$$

$$F(2)=\int_0^2 f(t)dt=A_3=\frac{16}{3}.$$

b) Las regiones con áreas A_1, A_2, A_3 y A_4 están representadas en el ejercicio 3 b). Además se representa a continuación la región con área A_5.



$$F(-3)=\underbrace{\int_{-5}^{-3} f(t)dt}_{A_5}=-1$$

$$F(-1)=\int_{-5}^{-1} f(t)dt=\underbrace{\int_{-5}^{-3} f(t)dt}_{A_5}+\int_{-3}^{-1} f(t)dt=-1+0=-1$$

$$F(2)=\int_{-5}^{2} f(t)dt=\underbrace{\int_{-5}^{-2} f(t)dt}_{-A_1}+\underbrace{\int_{-2}^{0} f(t)dt}_{A_2}+\underbrace{\int_{0}^{2} f(t)dt}_{-A_3}=\frac{3}{2}$$

$$F(5)=\int_{-5}^{5} f(t)dt=\underbrace{\int_{-5}^{-2} f(t)dt}_{-A_1}+\underbrace{\int_{-2}^{0} f(t)dt}_{A_2}+\underbrace{\int_{0}^{2} f(t)dt}_{-A_3}+\underbrace{\int_{2}^{5} f(t)dt}_{A_4}=-\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}.$$

7. Hallar la función integral de $f(x)=e^{x-1}-x^2$ en el intervalo [1,5].

Solución:

$$F(x)=\int_1^x \left(e^{t-1}-t^2\right)dt)=\left(e^{t-1}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{t=1}^{t=x}=\left(e^{x-1}-\frac{x^3}{3}\right)-\left(e^0-\frac{1}{3}\right)=e^{x-1}-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}.$$

8. Hallar (si existen) las funciones primitivas de

a) $f(x)=e^{2x}+\dfrac{1}{x}$ en [1,3].

b) $f(x)=\begin{cases} x & -1\le x\le 1 \\ e^x & 1<x\le 2 \end{cases}$ en [-1,2].

c) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & 1\le x\le 2 \\ 3x^2-9 & 2<x\le 4 \end{cases}$ en [1,4].

Solución:

a) $G(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\ln x+C$.

b) f no tiene primitivas en el intervalo [-1,2] ya que f no es continua en $x=1$ pues $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)=e$.

c) Las funciones primitivas de f serán aquellas funciones continuas de la forma

$$G(x)=\begin{cases} x^2-x+C_1 & 1\le x\le 2 \\ x^3-9x+C_2 & 2<x\le 4 \end{cases}$$

El ajuste de constantes se hace teniendo en cuenta que la función G debe ser continua en el intervalo [1,4] por lo que

$$\lim_{x\to 2^-} G(x)=2+C_1=\lim_{x\to 2^+} G(x)=-10+C_2$$

y, por tanto, $C_2=C_1+12$. Así, las primitivas buscadas son

$$G(x)=\begin{cases} x^2-x+C & 1\le x\le 2 \\ x^3-9x+12+C & 2<x\le 4 \end{cases}.$$

9. Indicar si las funciones

a) $G_1(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 0 \\ 2x-1 & x > 0 \end{cases}$ en [-1,1].

b) $G_2(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ en [-1,1].

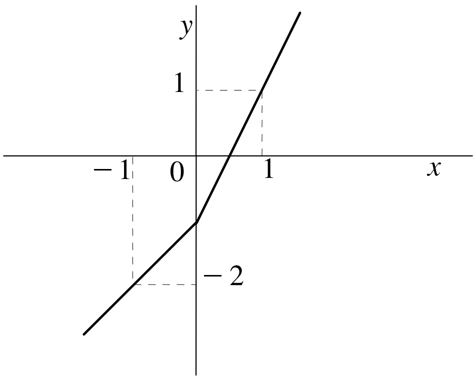
c) $G_3(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \le 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ en [0,2].

d) $G_4(x) = 5e^x + x^2$ en [-2,5].

pueden ser funciones primitivas de alguna función en el intervalo correspondiente. En caso afirmativo, calcular la función *f* de la que la función G_i, es función primitiva.

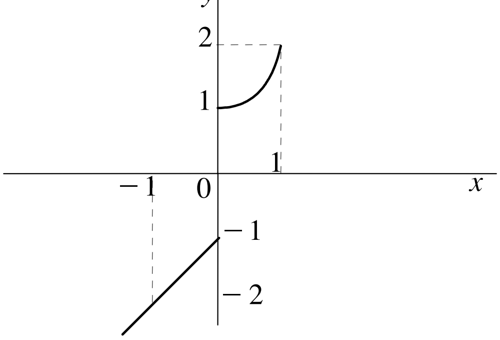
Solución:

a) $G_1(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 0 \\ 2x-1 & x > 0 \end{cases}$ en [-1,1]



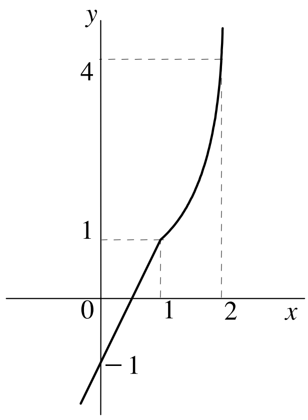
La función no puede ser primitiva de ninguna función porque no es derivable en todos los puntos del intervalo (–1,1), en concreto no es derivable en $x = 0$ ya que $G'_{1^+}(0) = 2 \ne 1 = G'_{1^-}(0)$

b) $G_2(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ en [-1,1]



No puede ser función primitiva de ninguna función por no ser derivable en [-1,1] ya que G_2 es discontinua en $x = 0$ pues $\lim_{x\to 0^+} G_2(x) = 1 \ne -1 = \lim_{x\to 0^-} G_2(x)$.

c) $G_3(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \le 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ en $[0,2]$



Esta función si es una función primitiva pues es derivable en el intervalo [0,2]. Es la función primitiva de

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \le 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

ya que $G_3^{'}(x) = f(x)$.

d) G_4 si es una función primitiva ya que es derivable en [-2,5]. Justamente es la primitiva de la función $f(x) = 5e^x + 2x$.

10. Dadas $f(x) = \begin{cases} \dfrac{t^2-1}{t-1} & t \ne 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$ y $F(x) = \int_0^x \left(\dfrac{t^2-1}{t-1} \right) dt$. Se pide:

a) Examinar la integrabilidad de *f* en [0,2].

b) Analizar la continuidad y derivabilidad de *F* en [0,2].

<u>Solución:</u>

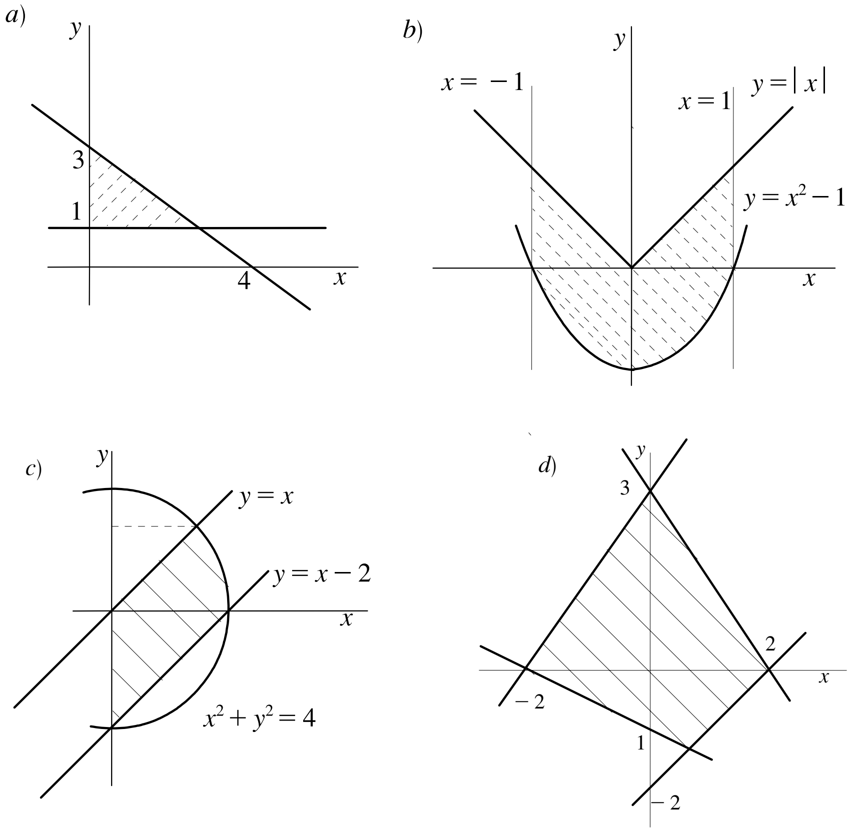
a) La función *f* es integrable en [0,2], ya que *f* es continua en dicho intervalo salvo en el punto $t = 1$.

$$\lim_{t \to 1} \left(\frac{t^2-1}{t-1} \right) = \lim_{t \to 1} \frac{(t+1)(t-1)}{t-1} = \lim_{t \to 1} (t+1) = 2 \ne f(1) = 0 .$$

b) *F* es una función continua en [0,2] ya que es la función integral de *f* en dicho intervalo. Obsérvese que $F(x) = \int_0^x \left(\dfrac{t^2-1}{t-1} \right) dt = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x (t+1)dt$.

c) La función integral F es derivable en [0,2], pues $F(x)=\int_0^x\left(\dfrac{t^2-1}{t-1}\right)dt=\int_0^x(t+1)dt=\dfrac{x^2}{2}+x$.

11. Indicar qué integral o integrales definidas habría que resolver para calcular el área de los siguientes recintos (tanto por "franjas" horizontales como por verticales).



<u>**Solución:**</u>

a) La recta que corta a los ejes en los puntos (4,0) y (0,3) tiene como ecuación $3x+4y=12$.

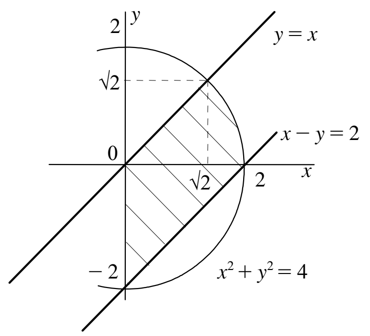
- Por franjas verticales: $\text{área}=\int_0^{8/3}\left(\dfrac{12-3x}{4}-1\right)dx=\dfrac{8}{3}$.
- Por franjas horizontales: $\text{área}=\int_1^{3}\left(\dfrac{12-4y}{3}\right)dy=\dfrac{8}{3}$.

b) Como la región es simétrica respecto del eje OY, al calcular el área podemos considerar sólo una mitad de la región y después multiplicar el área de ésta por dos.

- Por franjas verticales: $\text{área} = 2\int_0^1 \left(x-(x^2-1)\right)dx = 2\left(\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1\right) = \frac{7}{3}.$

- Por franjas horizontales: $\text{área} = 2\left[\int_0^1 (1-y)dy + \int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy\right] = \frac{7}{3}.$

c)



Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de la recta $y = x$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

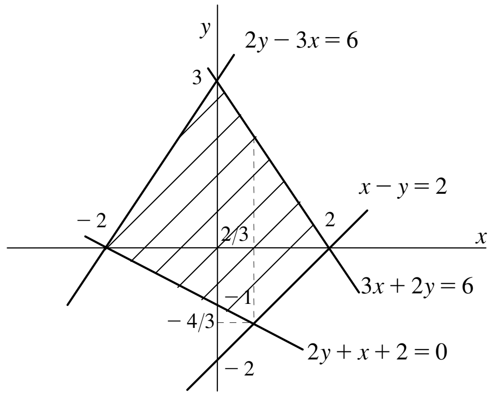
$$\left.\begin{aligned} y &= x \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}\right\} \to 2x^2 = 4 \to x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$$

.

- Por franjas verticales: $\text{área} = \int_0^{\sqrt{2}} (x-(x-2))dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\sqrt{4-x^2}-(x-2)\right)dx.$

- Por franjas horizontales: $\text{área} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-y^2}-y\right)\,\mathrm{d}y + \int_{-2}^0 (2+y)\,\mathrm{d}y.$

(d)



Calculamos en primer lugar el punto de intersección de las siguientes rectas.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + 2y &= -2 \end{aligned}\right\} \to 3y = -4 \to y = -\frac{4}{3} \to x = \frac{2}{3}$$

- Por franjas verticales:

$$\text{área} = \int_{-2}^{0}\left(\frac{6+3x}{2}-\frac{-2-x}{2}\right)dx + \int_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{6-3x}{2}-\frac{-2-x}{2}\right)dx + \int_{\frac{2}{3}}^{2}\left(\frac{6-3x}{2}-(x-2)\right)dx = \frac{28}{3}.$$

- Por franjas horizontales:

$$\text{área} = \int_{-\frac{4}{3}}^{0}((y+2)-(2-2y))dy + \int_0^3\left(\frac{6-2y}{3}-\frac{2y-6}{3}\right)dy = \frac{28}{3}.$$

12. Hallar el área de las siguientes regiones:

a) Limitada por $y = x^2 + 2,\ y + x = 0,\ x = 0,\ x = 1$.

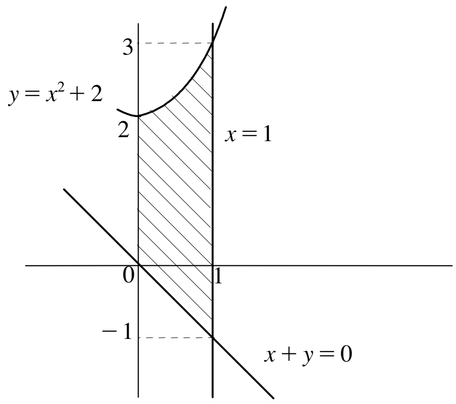
b) Limitada por $y^2 = 4x,\ y = 2x - 4$.

c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y \le 4,\ y \ge x - 2,\ y + 3x + 6 \ge 0\}$.

d) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le 2x\right\}$.

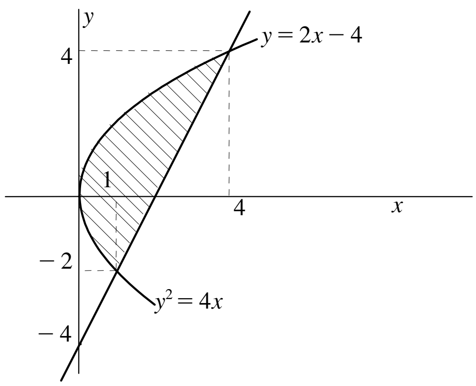
Solución:

a)



$$A(R) = \int_0^1 \left(x^2 + 2 - (-x)\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 + 2 + x\right)dx = \frac{17}{6}$$

b)



Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de las dos curvas.

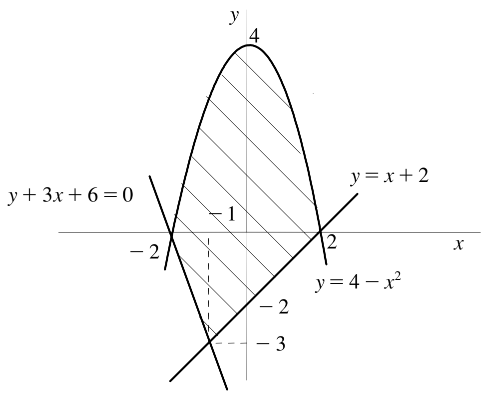
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{y^2}{4} \\ y = 2x - 4 \end{array}\right\} \to y = \frac{y^2}{2} - 4 \to y^2 - 2y - 8 = 0 \to y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 4 \to x = 4 \\ -2 \to x = 1 \end{array}\right.$$

Calculamos el área de la región por franjas horizontales que utiliza sólo una integral.

$$A(R)=\int_{-2}^{4}\left(\frac{y+4}{2}-\frac{y^2}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(\frac{y+4}{2}\right)dy-\frac{1}{4}\int_{-2}^{4}\left(y^2\right)dy.=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(y+4)^2}{2}\bigg|_{-2}^{4}-\frac{1}{4}\frac{y^3}{3}\bigg|_{-2}^{4}=15-6=9.$$

c)



Calculamos en primer lugar el punto de intersección de las dos rectas.

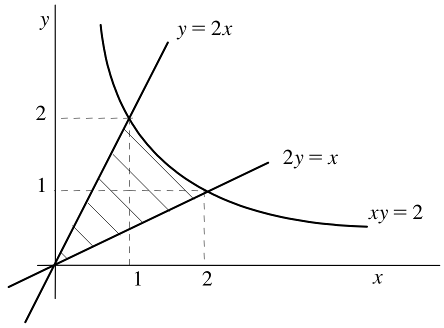
$$\left.\begin{array}{r} y-x+2=0 \\ y+3x+6=0 \end{array}\right\}\to 4x+4=0\to x=-1\to y=-3\,.$$

La región se divide en dos regiones, y se calcula el área de la parte superior por franjas verticales y el área de la parte inferior por franjas horizontales.

$$A(R)=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx+\int_{-3}^{0}\left[(2+y)-\left(\frac{-y-6}{3}\right)\right]dy=\int_{-2}^{2}4dx-\int_{-2}^{2}x^2dx+\int_{-3}^{0}\left(4+\frac{4}{3}y\right)dy=$$

$$=4x\big|_{-2}^{2}-\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{2}+4y\big|_{-3}^{0}+\frac{4}{3}\frac{y^2}{2}\bigg|_{-3}^{0}=16-\frac{16}{3}+12-\frac{18}{3}=\frac{50}{3}.$$

d)



$$A(R)=\int_{0}^{1}\left(2x-\frac{x}{2}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)dx=\int_{0}^{1}\frac{3}{2}xdx+\int_{1}^{2}\frac{2}{x}dx-\frac{1}{2}\int_{1}^{2}xdx=$$

$$=3\frac{x^2}{4}\bigg|_{0}^{1}+2\ln x\big|_{1}^{2}-\frac{x^2}{4}\bigg|_{1}^{2}=\frac{3}{4}+2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2\ .$$

13. Sabiendo que una función f es continua en $[0,b]$ y satisface la ecuación $\int_0^x f(t)dt = x + x^2$ para todo $x \in [0,b]$, determinar $f(x)$.

Solución:

$\int_0^x f(t)dt$ es la función integral de f, que además es derivable ya que f es continua. Entonces por el primer teorema fundamental del cálculo integral $F'(x) = f(x)$ (siendo $F(x) = \int_0^x f(t)dt$) para todo $x \in [0,b]$. Por tanto,

$$f(x) = 1 + 2x .$$

14. Si la función de costes marginales de una empresa está dada por la función $CM_g(Q) = C'(Q) = 25 - 30Q - 9Q^2$ y los costes fijos son $CF = 55$. Calcular:

a) La función de costes variables.

b) La función de costes totales.

Solución:

a) Puesto que el coste marginal es la derivada respecto de la cantidad producida de los costes variables tenemos que:

$$\begin{aligned} CV(Q) &= \int C'(Q)dQ = \int \left(25 + 30Q - 9Q^2\right)dQ = \\ &= 25\int dQ + 30\int QdQ - 9\int Q^2 dQ \\ &= 25Q + 15Q^2 - 3Q^3 + C. \end{aligned}$$

Ahora bien, $CV(0) = 0$. Por tanto $C = 0$ y $CV(Q) = 25Q + 15Q^2 - 3Q^3$.

b) Los costes totales son los costes variables más los costes fijos

$$CT(Q) = CF + CV(Q) = 55 + 25Q + 15Q^2 - 3Q^3 .$$

15. Si se define la inversión neta como la variación del stock de capital durante un determinado periodo de tiempo, es decir $\frac{dK(t)}{dt} = I(t)$ y supuesto que el flujo de inversión neta está descrito por la función $I(t) = 3\sqrt{t}$ (millones de euros por año). Se pide:

a) ¿Es posible encontrar más de una función $K(t)$ que defina el stock de capital?

b) Si la formación de capital es el proceso de aumentar un stock dado de capital y este proceso se considera continuo en el tiempo, supuesto que la función $I(t)$ es la definida anteriormente y que el stock de capital en $t = 0$ es $K(0) = 1000$. ¿Cuál es la trayectoria temporal de $K(t)$?

c) Determinar el nivel de producción de capital del quinto al octavo año.

Solución:

a) Todas las funciones

$$K(t) = \int I(t)\ dt = \int 3\sqrt{t}\ dt = 2t^{\frac{3}{2}} + C$$

son funciones para las que se verifica $I(t) = \frac{dK(t)}{dt}$.

b) Puesto que el stock inicial es $K(0) = 1000$ podemos determinar unívocamente la trayectoria temporal de formación de capital pues en ese caso

$$K(0) = 1000 = 2 \cdot 0^{\frac{3}{2}} + C \to C = 1000$$

y $K(t) = 1000 + 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}$.

c) La formación de capital del quinto al octavo año vendrá dado por la integral definida

$$\int_4^8 I(t)dt = \int_4^8 3\sqrt{t}dt = 2t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^8 = 2 \cdot 8^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot 4^{\frac{3}{2}} = 16\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

16. El equipo de marketing de la empresa Hoyo S.A. dedicada a la comercialización de videos ha estudiado que el ritmo de crecimiento de la demanda (en millones de euros por año) durante los cinco primeros años de existencia de la empresa viene dado por la función $g(t) = \frac{t}{5}$. Para aumentar las ventas, dicho equipo decide hacer una campaña publicitaria la cual da lugar a que el ritmo de variación de la demanda sea según la función $f(t) = 7 - \frac{3}{8}(t-9)^2$. Se pide:

a) Hallar la función que nos permita conocer la demanda en cualquier instante de tiempo.

b) ¿Cuál es la demanda después de 8 años? ¿Fue positiva la campaña publicitaria?

c) ¿En qué instante la empresa deberá cambiar su política publicitaria si no desea que la demanda disminuya?

<u>**Solución:**</u>

La variación de la demanda es

$$d(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{5} & 0 \le t \le 5 \\ 7 - \dfrac{3}{8}(t-9)^2 & t > 5 \end{cases}$$

a) La función que nos permite conocer la demanda en cualquier instante es una función cuya derivada es la función *d(t)*. Buscamos entonces una función primitiva de *d*. Ahora bien, como *d* es continua, una de sus primitivas es su función integral.

$$D(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t d(x)dx = \int_0^t \frac{x}{5}dx = \frac{t^2}{10} & 0 \le t \le 5 \\ \displaystyle\int_0^t d(x)dx = \int_0^5 \frac{x}{5}dx + \int_5^t \left(7 - \frac{3}{8}(x-9)^2\right) dx & t > 5 \end{cases}$$

Se obtiene por tanto

$$D(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{10} & 0 \le t \le 5 \\ 7t - \dfrac{1}{8}(t-9)^3 - \dfrac{81}{2} & t > 5 \end{cases}$$

b) La demanda después de 8 años es $D(8) = 56 + \frac{1}{8} - \frac{81}{2} = \frac{125}{8}$.

La campaña fue positiva ya que $D(5) = \frac{25}{10} < D(8) = \frac{125}{8}$.

c) La empresa deberá cambiar su política publicitaria cuando la demanda comience a disminuir, lo cual sucede cuando $\frac{dD(t)}{dt} = d(t) < 0$. Puesto que para $t < 5, d(t) > 0$, analizamos el caso $t > 5$

$$7 - \frac{3}{8}(t-9)^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}(t-9)^2 > 7 \Leftrightarrow (t-9)^2 > \frac{56}{3} \Leftrightarrow t > 9 + \sqrt{\frac{56}{3}} \approx 13{,}32\,.$$

Al cabo de 13 años la empresa debe cambiar su política publicitaria.

17. En 1959 el valor real del grupo de empresas UMASA ascendía a 99 millones de pesetas. Hasta 1968 la política comercial y financiera practicada proporcionó beneficios crecientes según la función $f(t) = \sqrt{t}$ (en millones de pesetas por año). A partir de 1968 el holding inició una fuerte expansión mediante la absorción de empresas "cadáver" que hizo quebrar la tendencia creciente de beneficios, los cuales pasan a ser $f(t) = 12 - t$ (en millones de pesetas por año). Se pide:

a) Calcular el volumen de beneficios acumulados en la primera etapa.
b) Determinar a partir de que año los beneficios empiezan a ser negativos y calcular el volumen de beneficios acumulados hasta entonces.
c) Determinar cuando es nulo el beneficio acumulado.
d) Si las leyes mercantiles presentes prescriben que las empresas cuyas pérdidas acumuladas superen el 50% de su valor real sean expropiadas, determinar el año en que la administración expropiará el holding.

Solución:

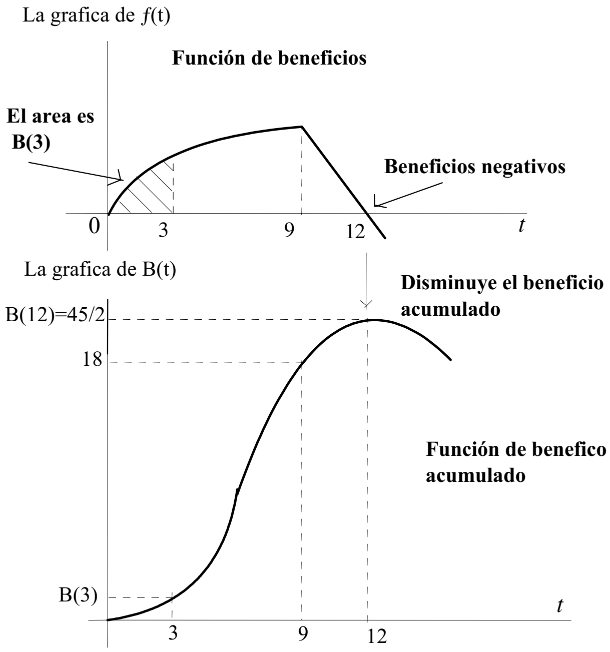
La función de beneficios es $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & 0 \le t < 9 \\ 12 - t & t \ge 9 \end{cases}$.

a) El beneficio acumulado está dado por la siguiente función

$$B(t) = \int_0^t f(x)dx = \begin{cases} \int_0^t \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} & 0 \le t < 9 \\ \int_0^9 \sqrt{x}dx + \int_9^t (12-x)dx = 12t - \frac{t^2}{2} - \frac{99}{2} & t \ge 9 \end{cases}$$

Así pues el beneficio acumulado en la primera etapa (1959-1968) es $B(9) = 18$ millones ptas.

b) El beneficio es negativo si $f(t) < 0$, es decir , cuando $t > 12$. Los beneficios acumulados hasta ese momento son $B(12) = \dfrac{45}{2}$.



c) El beneficio acumulado es nulo en el instante T que verifica $B(T) = 0$.

Esto es, el valor de T que satisface la ecuación siguiente (pues para $T < 9,\ B(T) > 0$

$$12T - \frac{T^2}{2} - \frac{99}{2} = 0 \Leftrightarrow 24T - T^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow T^2 - 24T + 99 = 0 \Leftrightarrow T = \frac{24 + \sqrt{170}}{2} \approx 18{,}5.$$

El beneficio acumulado es nulo aproximadamente en julio del año 1977 (1959+18,5).

d) Según el apartado b) la empresa empieza a tener pérdidas pasados 12 años. Las pérdidas al cabo de T años son

$$\int_{12}^{T} (12 - t)dt = \left(12t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{12}^{T} = 12T - \frac{T^2}{2} - 144 + \frac{144}{2} = 12T - \frac{T^2}{2} - 72\,.$$

La administración expropia el holding si las pérdidas son superiores al 50% del valor real. Por tanto, se trata de encontrar el valor de T para el cual

$$12T - \frac{T^2}{2} - 72 < -\frac{50.99}{100} \Leftrightarrow \frac{T^2}{2} - 12T + 72 - \frac{99}{2} > 0 \Leftrightarrow T^2 - 24T + 45 > 0$$

$$T^2 - 24T + 45 = 0 \to T = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 180}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{396}}{2} \approx \frac{24 \pm 20}{2} \langle \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix}$$

Así pues la administración expropiará el holding en 1981 (1959+22).

Ejercicios propuestos

1. Hallar la función integral de las siguientes funciones:

a) $f(t) = \operatorname{sen} 2t$ en [0,3].

b) $f(t) = \begin{cases} e^{t+1} & -1 \le t \le 0 \\ t & 0 < t \le 1 \end{cases}$ en [-1,1].

c) $f(t) = \begin{cases} t^2 + t & -2 \le t \le 1 \\ 2t & 1 < t \le 4 \end{cases}$ en [-2,4].

2. Hallar (si existen) las funciones primitivas de**:**

a) $f(x) = (x+1)^4$ en $(-\infty, \infty)$.

b) $f(t) = \begin{cases} \ln x & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{x^2}{2} + e^x & 2 < x \le 4 \end{cases}$ en $[1,4]$.

c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & -1 \le x \le 0 \\ 5x^4 & 0 < x \le 2 \end{cases}$ en [-1,2]

3. Calcular el área de la región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le y \le |x|, \ y \ge x^2 - x\right\}$.

4. Una empresa creada en 1988 ($t = 0$) y con unos costes fijos de 50 millones de pesetas sabe que el ritmo de crecimiento de sus costes viene determinado por la función $f(t) = t^2$, donde t se mide en años y *f(t)* en millones de euros por año. Para disminuir sus costes de producción, la empresa decide en 1990 reducir personal. Así, el ritmo de variación de sus costes cambia, y pasa a venir determinado por la función $g(t) = t + 2$. Se pide:

a) Determinar la función de coste de la empresa.

b) Calcular el coste que tuvo la empresa en 1992.

c) ¿Fue acertada la decisión de reducir personal?

5. Una multinacional sabe que durante sus diez primeros años de existencia ha tenido unos beneficios determinados por la función $f(t) = \dfrac{t}{10}$ (*t* medido en años y *f(t)* en millones de euros por año). Para aumentar sus beneficios, la compañía decide hacer una campaña publicitaria y, así, sus beneficios pasaron a ser $g(t)=\frac{1}{12}t^2+2t-\frac{32}{3}$.

Se pide:

a) Calcular la función que determina el beneficio acumulado.

b) ¿Cuál es el volumen de beneficios acumulados durante los 10 primeros años?

c) ¿Cuándo debería cambiar la campaña publicitaria si la empresa no quiere que sus beneficios decrezcan?