TEMA 5

Aplicaciones del cálculo diferencial

Contenidos:

1. Crecimiento y decrecimiento. Extremos

Veamos a continuación una aplicación de la derivada de una función al estudio del crecimiento o decrecimiento de dicha función.

Recordemos que una función f se dice creciente (respectivamente estrictamente creciente) en un intervalo $I \subset \text{Dom}(f)$ si $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) < f(x_2)$). Y se dice que f es decreciente (resp. estrictamente decreciente) en un intervalo $I \subset \text{Dom}(f)$ si $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$ (resp. $f(x_1) > f(x_2)$).

Teorema 1. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces*

(a) f es creciente en I si y sólo si $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

(b) f es decreciente en I si y sólo si $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

(c) Si $f'(x) > 0, \forall x \in I$, entonces f es estrictamente creciente en I.

(d) Si $f'(x) < 0, \forall x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente en I.

Ejemplo 1.

(a) $f(x) = 3$. Como $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que f es a la vez creciente y decreciente en $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x^2$. En este caso $f'(x) = 2x$ Por tanto, $f'(x) \geq 0$ si y solo si $x \geq 0$, de lo que deducimos que f es creciente en $[0,+\infty)$ y $f'(x) \leq 0$ si y sólo si $x \leq 0$, por tanto, f es decreciente en $(-\infty,0]$. Además, utilizando el teorema anterior también podemos asegurar que f es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$, por ser $f'(x) > 0$ en $(0,+\infty)$, y f es estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$, por ser $f'(x) < 0$ en $(-\infty,0)$.

(c) $f(x) = x^3$. En este caso $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, f es creciente en $\mathbb{R}$. De hecho, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R} - \{0\}$ $\left(f'(x) > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{0\}\right)$. Por la definición se comprueba que f es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, aunque $f'(0) = 0$ $\left(\text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right)$.

(d) $f(x) = e^x$. Como $f'(x) = e^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

(e) $f(x) = \ln x$ Como $f'(x) = 1/x > 0, \ \forall x \in \text{Dom}(f) = (0,+\infty)$ entonces f es estrictamente creciente en su dominio.

Observación. Los recíprocos de las dos últimas afirmaciones del Teorema 1 no son ciertos. La función $f(x) = x^3$, considerada en el apartado (c) del ejemplo anterior, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, aunque $f'(0) = 0$. De manera análoga se comprueba que $f(x) = -x^3$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$, aunque su derivada no sea negativa en todo punto de $\mathbb{R}$.

Definición 1.

1. *Extremos relativos o locales*

   (a) *La función f tiene un máximo relativo o local en* x_0 *si existe un intervalo I al que pertenece* x_0 *tal que* $f(x) \leq f(x_0)$ *para todo* $x \in I \cap \mathrm{Dom}(f)$

   (b) *La función f tiene un mínimo relativo o local en* x_0 *si existe un intervalo I al que pertenece* x_0 *tal que* $f(x) \geq f(x_0)$ *para todo* $x \in I \cap \mathrm{Dom}(f)$

2. *Extremos absolutos o globales*

   (a) *La función f tiene un máximo absoluto o global en* x_0 *si* $f(x) \leq f(x_0)$ *para todo* $x \in \mathrm{Dom}(f)$

   (b) *La función f tiene un mínimo absoluto o global en* x_0 *si* $f(x) \geq f(x_0)$ *para todo* $x \in \mathrm{Dom}(f)$

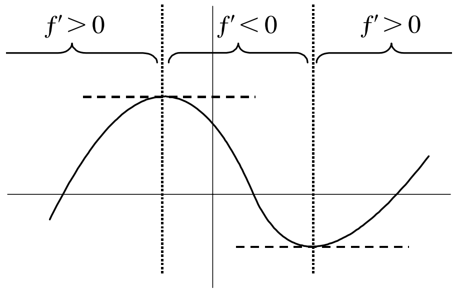
Observación. Si la función *f* tiene un máximo global (resp. mínimo global) en x_0, entonces, en particular, tiene un máximo local (resp. mínimo local) en dicho punto.

Vamos ahora a caracterizar los extremos locales de una función *f* utilizando sus derivadas.

Teorema 2. *Sea f una función derivable en un intervalo abierto* $I \subset \mathrm{Dom}(f)$ *Si* $x_0 \in I$ *es un extremo local de f, entonces* $f'(x_0) = 0$

Definición 2. *Se dice que* x_0 *es un punto crítico de f si* $f'(x_0) = 0$.

Nótese que en los extremos la función pasa de ser creciente $\left(f'(x_0) \geq 0\right)$ a decreciente $\left(f'(x_0) \leq 0\right)$ o viceversa y, por tanto, en ellos f' es 0 (son puntos críticos). En consecuencia, la recta tangente a la gráfica de *f* en los puntos extremos es paralela al eje de abscisas.



Teorema 3. *Sea* $x_0 \in I \subset \mathrm{Dom}(f)$ *y sea f una función con derivadas primera y segunda continuas en* x_0.

1. *Si* $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ *entonces* x_0 *es un mínimo local de f.*
2. *Si* $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ *entonces* x_0 *es un máximo local de f.*

En general, si f tiene n derivadas continuas en un punto x_0 *de su dominio y* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1}(x_0) = 0,\ f^{(n}(x_0) \neq 0$ *entonces:*

1. *Si n es par y* $f^{(n}(x_0) > 0$, x_0 *es un mínimo local de f.*
2. *Si n es par y* $f^{(n}(x_0) < 0$, x_0 *es un máximo local de f.*
3. *Si n es impar, f no tiene extremo en* x_0.

Ejemplo 2.

(a) $f(x) = x^2$ En este caso, $f'(x) = 2x = 0$ si y sólo si $x = 0$, y $f''(0) = 2 > 0$ de lo que deducimos que f tiene un mínimo local o relativo en 0. De hecho, $x = 0$ es un mínimo global ya que $f(x) = x^2 > 0 = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = x^3$ Dado que $f'(x) = 3x^2 = 0$ si y sólo si $x = 0$, y como la primera derivada que no se anula en el 0 es de orden impar $\left(f''(0) = 0, f'''(0) = 6\right)$, *f* no tiene un extremo en el 0.

(c) $f(x) = e^x$ Como $f'(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ entonces *f* no tiene extremos locales y, por tanto, tampoco globales.

(d) $f(x) = x^{2/3}$ En este caso $x = 0$ es un mínimo global (y, por tanto, también local) de f pues $f(x) \geq 0 = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, no podemos aplicar el teorema anterior porque f no es derivable en el punto $x = 0$.

Observación. Nótese que también son candidatos a extremos aquellos puntos del dominio de f en los que f' no está definida, como muestra el apartado (d) del ejemplo anterior.

2. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

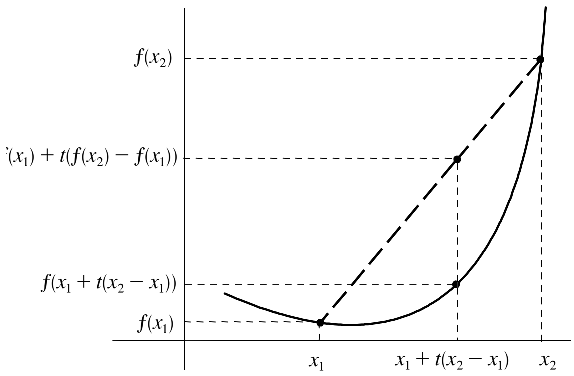
Definición 3.

1. *La función f es convexa en un intervalo I si, para todo* $x_1, x_2 \in I$*, el segmento que une los puntos* $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ *queda por encima de la gráfica de f, es decir, si*

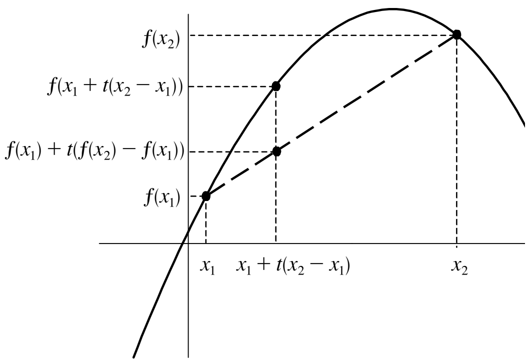
$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)), \quad \forall t \in [0,1]$$

2. *La función f es cóncava en un intervalo I si, para todo* $x_1, x_2 \in I$*, el segmento que une los puntos* $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ *queda por debajo de la gráfica de f, es decir, si*

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)), \quad \forall t \in [0,1]$$



f convexa



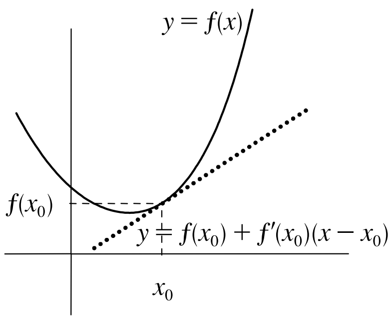
f cóncava

Observaciones.

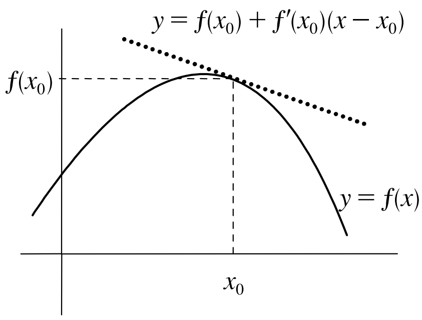
1. Una función f es convexa si y sólo si $-f$ es cóncava.
2. Si f es derivable en I, entonces se verifica que f es convexa (resp. cóncava) en I si y sólo si, para todo $x_0, x \in I$, se tiene

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \left(\text{resp. } f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)$$

es decir, la gráfica de f queda por encima (resp. por debajo) de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x_0.



f convexa



f cóncava

Teorema 4.

1. *Sea f una función convexa (resp. cóncava) en un intervalo I. Si f es derivable en I, entonces su derivada f' es creciente (resp. decreciente).*
2. *Si f tiene derivada segunda en I se tiene que*
   a) *si $f''>0$ en I, entonces f es convexa (al ser f' estrictamente creciente).*
   b) *si $f''<0$ en I, entonces f es cóncava (al ser f' estrictamente decreciente).*

Ejemplo 3.

a) $f(x)=x^2$ Como $f''(x)=2>0, \forall x\in\mathbb{R}$, f es convexa en todo $\mathbb{R}$.

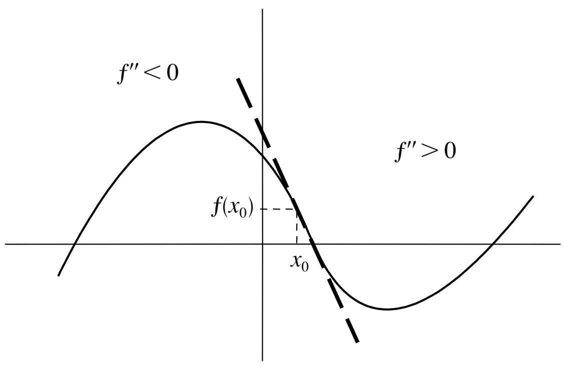
b) $f(x)=-x^2$ Como $f''(x)=-2<0, \forall x\in\mathbb{R}$, f es cóncava en todo $\mathbb{R}$.

c) $f(x)=\ln x$ En este caso, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0, \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ y, por tanto, f es cóncava en su dominio, esto es, en $(0,+\infty)$.

d) $f(x)=e^x$ En este caso, $f''(x)=e^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$, y por tanto f es convexa en $\mathbb{R}$.

Definición 4. *Un punto de inflexión de f es un punto $x_0\in\mathrm{Dom}(f)$ donde f pasa de ser cóncava a convexa o viceversa.*

Observación. Si existe la recta tangente a la gráfica de f en un punto de inflexión x_0, dicha recta tangente cruza a la gráfica de f en x_0.



Teorema 5. *Sea $x_0\in I\subset\mathrm{Dom}(f)$ y sea f una función con derivadas primera, segunda y tercera continuas en x_0. Entonces, si $f''(x_0)=0$ y $f'''(x_0)\neq 0$, x_0 es un punto de inflexión de f. En general, si la función f tiene n derivadas continuas en x_0 y $f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1}(x_0)=0, f^{(n}(x_0)\neq 0$, con n impar, entonces x_0 es un punto de inflexión de f.*

Ejemplo 4.

(a) $f(x) = x^3$. En este caso, $f''(x) = 6x = 0$ si y solo si $x = 0$ y, como la primera derivada que no se anula en el cero es de orden impar $\left(f'''(0) = 6\right)$, $x = 0$ es un punto de inflexión de *f*.

(b) $f(x) = x^{1/3}$ En este caso, $x = 0$ es un punto de inflexión de *f*, pues $f'''(x) = \dfrac{-2}{9x^{5/3}} > 0$ (f es convexa) si y sólo si $x < 0$, y $f'''(x) = \dfrac{-2}{9x^{5/3}} < 0$ (f es cóncava) si y sólo si $x > 0$. En este caso no podemos aplicar el Teorema 4 porque f no es derivable en el punto $x = 0$.

Observaciones:

1. Si x_0 es un punto de inflexión de una función f derivable, $f'(x_0)$ puede no ser cero, esto es, los puntos de inflexión pueden no ser puntos críticos.
2. Nótese que también son candidatos a puntos de inflexión aquellos puntos del dominio de f en los que f''' no está definida, como muestra el apartado (b) del ejemplo anterior.

3. Estudio de la gráfica de una función

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, para representar su gráfica estudiamos los siguientes apartados:

(a) Determinación del dominio de f: $\text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \text{ existe } f(x)\}$.

(b) Continuidad y derivabilidad. f continua en $a\in\mathbb{R}$ si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

f derivable en $a\in\mathbb{R}$ si $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe y es finito

(c) Simetrías.

1. Si $f(x)=f(-x),\ \forall x\in\text{Dom}(f)$, (función par) la gráfica de f es simétrica respecto al eje de las ordenadas.
2. Si $f(-x)=-f(x),\ \forall x\in\text{Dom}(f)$, (función impar) la gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

(d) Periodicidad. La función f es periódica de período T si T es el mínimo valor positivo tal que $f(x)=f(x+T),\ \forall x\in\text{Dom}(f)$

Nótese que las simetrías y periodicidad de f nos permiten obtener la gráfica de la función sin más que analizarla en un subconjunto de $\text{Dom}(f)$.

(e) Puntos de corte con el eje de las abscisas: puntos $x_0\in\text{Dom}(f)$ tales que $f(x_0)=0$

(f) Asíntotas.

1. Asíntotas horizontales: $y=y_0$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0 \text{ , o bien, } \lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0 .$$

2. Asíntotas verticales: $x=x_0$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty \text{ , o bien, } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty .$$

3. Asíntotas oblicuas: $y=mx+n$ es una asíntota oblicua si

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ y $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$ o bien,

b) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ y $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$

(e) Crecimiento y decrecimiento. Extremos locales.

1. f es creciente (resp. decreciente) en I si y sólo si

$$f'(x) \geq 0 \ \left(\text{resp. } f'(x) \leq 0\right), \ \forall x \in I .$$

2. x_0 es un máximo (resp. mínimo) de f si

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1}(x_0) = 0, f^{(n}(x_0) < 0$$

$$\left(\text{resp. } f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1}(x_0) = 0, f^{(n}(x_0) > 0\right)$$

siendo n par, o bien, f' no está definida en x_0 y el signo de f' cambia en este punto.

(f) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

1. Si $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$) en I, entonces f es convexa (resp. cóncava) en I.

2. El punto $x_0 \in \text{Dom}(f)$ es un punto de inflexión de f si

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1}(x_0) = 0, f^{(n}(x_0) \neq 0$$

siendo n impar, o bien, f'' no está definida en x_0 y el signo de f'' cambia en este punto.

Ejemplo 5. Representar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Solución:

(a) $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / \text{ existe } f(x)\} = \mathbb{R} - \{-1,1\}$.

(b) Continuidad y derivabilidad. f es continua y derivable en su dominio por ser cociente de dos polinomios y no anularse el denominador en dicho conjunto.

(c) Simetrías. Veamos si f es simétrica respecto del eje de ordenadas o del origen. Para ello vemos si la función es par o impar:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$$

Como la función es impar, su gráfica es simétrica respecto del origen.

(d) Periodicidad. $f(x+T) = \dfrac{(x+T)^3}{(x+T)^2 - 1} \neq f(x), \ \forall T \neq 0$. La función no es periódica.

(e) Corte con el eje de las abcisas. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(f) Asíntotas.

1. Asíntotas horizontales: Estudiamos los siguientes límites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty ; \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

Por tanto, f no tiene asíntotas horizontales.

2. Asíntotas verticales: Como $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)}$, $f(x)$ tiende a $\pm\infty$ cuando x tiende a -1 ó 1. Para ver cómo se aproxima asintóticamente la gráfica de f a las rectas $x=-1$ y $x=1$ estudiamos los siguientes límites laterales:

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to(-1)+} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$$

Así pues, las rectas $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

3. Asíntotas oblicuas: Se estudian los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=1; \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

y

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=1; \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

Así pues, como $m=1$ y $b=0$, la recta $y=x$ es una asíntota oblicua.

(g) Puntos críticos. Extremos locales y puntos de inflexión.
Calculamos la primera y la segunda derivada de *f*.

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2},\ f''(x)=\frac{2x(x^2+x)}{(x^2-1)^3}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3)=0 \Leftrightarrow x=0,\pm\sqrt{3}\ .$$

Estudiamos el valor de la derivada segunda en estos puntos:

$$f''(-\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}<0, f''(\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{y}\, f''(0).$$

Por tanto, $x=-\sqrt{3}$ es un máximo local, $x=\sqrt{3}$ es un mínimo local y, para saber si $x=0$ es un extremo local de la función o un punto de inflexión, calculamos $f'''(0)$.

$$f'''(x)=\frac{-6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4},\ f'''(0)=-6\neq 0$$

Luego, $x=0$ es un punto de inflexión.

(h) Crecimiento y decrecimiento.
Estudiamos el signo de la derivada primera de *f*. Como

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^2+x)}{(x^2-1)^3},,$$

el signo de f' depende fundamentalmente del signo de (x^2-3), siendo

$f'(x)>0$ si y sólo si $x^2-3>0 \Leftrightarrow x^2>3 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ y

$f'(x)\leq 0$ si $x^2\leq 3$ y $x^2\neq 1$, esto es, cuando $x\in[-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3}]$.

Así pues, la función f es estrictamente creciente en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ y decreciente en $[-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3}]$. De este estudio también deducimos que $x=-\sqrt{3}$ es un máximo local y $x=\sqrt{3}$ es un mínimo local.

(i) Concavidad y convexidad.
Estudiamos el signo de la derivada segunda de *f*. Dado que

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \Leftrightarrow 2x(x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$$

sabemos que si f'' cambia de signo, lo hace en los puntos $x = -1$, $x = 1$ (donde f no está definida) o en $x = 0$ (donde f'' se anula). Por tanto, para estudiar la concavidad y convexidad de f analizamos el signo de f'' en los intervalos $(-\infty 1 - 1), (-1,0), (0,1), (1,+\infty)$. Como en estos intervalos el signo de f'' permanece constante, para saber de que signo se trata basta examinar el signo de f'' en un punto arbitrario de cada intervalo.

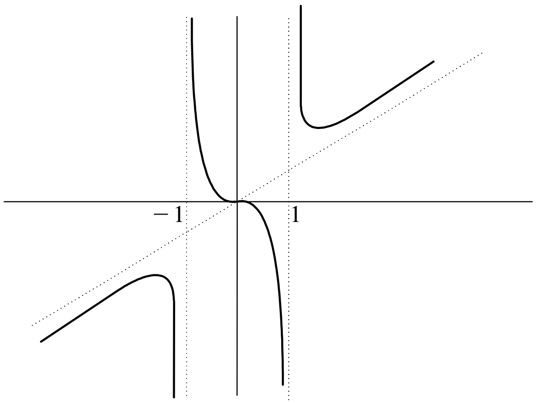
En consecuencia, la función f es cóncava en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$ pues

$$-2 \in (-\infty,-1),\ f''(-2) < 0 \ \text{ y } \ 1/2 \in (0,1),\ f''(1/2) < 0$$

y la función f es convexa en $(-1,0) \cup (1,+\infty)$ pues

$$\text{-}1/2 \in (-1,0),\ f''(1/2) > 0 \ \text{ y } \ 2 \in (1,+\infty),\ f''(2) > 0 \quad .$$

Con el estudio ya realizado podemos representar la gráfica de la función:



4. Aplicaciones a la Economía

En capítulos anteriores hemos visto que la interdependencia entre variables económicas se puede modelizar usando funciones de una variable. Así por ejemplo, la evolución de la demanda de un bien en función de su precio se puede representar mediante la función $Q(P)$, donde P es el precio del bien y $Q(P)$ es la cantidad demandada del bien correspondiente al precio P. Este primer paso abre muchas posibilidades de análisis del fenómeno económico subyacente. El cálculo diferencial suministra una serie de herramientas útiles en dicho análisis. En este apartado nos proponemos discutir la interpretación económica del concepto de derivada, analizar el comportamiento de algunas funciones económicas e introducir el problema de optimización en Economía.

En el tema 4 se han discutido previamente dos interpretaciones posibles del concepto de derivada. Desde el punto de vista geométrico, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en dicho punto. Además, es posible interpretar la derivada como la razón de cambio de una función respecto de una alteración en el valor de la variable independiente. Queremos examinar ahora la *interpretación económica* del concepto de derivada.

Sea $C(x)$ el coste de producción de x unidades de un bien. En Economía llamamos a $C'(x)$ el *coste marginal* (en x). En general, a la derivada de una función f en Economía se le denomina *función marginal*. Para interpretar el concepto de coste marginal, necesitamos el concepto de diferencial. Recordemos que si a es un punto que pertenece al dominio de $C(x)$, *la diferencial de* $C(x)$ *en* a (dC_a) es la función dada por

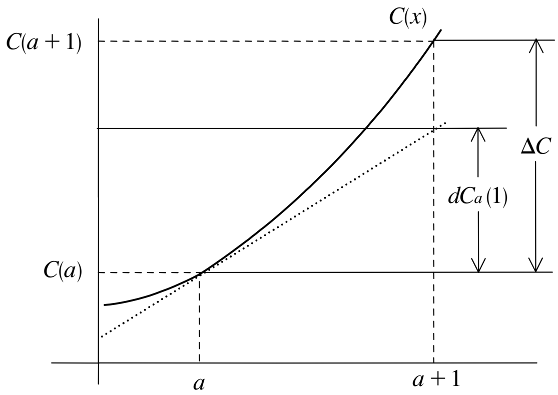
$$dC_a(\Delta x) = C'(a)\Delta x .$$

Despejando $C'(a)$ obtenemos

$$C'(a) = \frac{dC_a(\Delta x)}{\Delta x},$$

de tal manera que para un incremento unitario de la variable x, tenemos que $C'(a) = dC_a(1)$. Ahora bien, ya que $dC_a(1)$ es una buena aproximación del incremento real del coste $\Delta C = C(a+1) - C(a)$, podemos concluir que el *coste marginal* $C'(x)$ es aproximadamente el *coste adicional de producir una unidad más de* x.

$$C'(a) = dC_a(1) \approx C(a+1) - C(a)$$



Ejemplo 6. Supongamos que los costes fijos de producción de una empresa que produce bicicletas es de 50.000 euros por semana y de 25 euros por cada bicicleta elaborada. La función de costes totales de la empresa es

$$C(q) = 50.000 + 25q$$

Puesto que $C'(q) = 25$, el coste marginal de producción es de 25 euros, independientemente del nivel de producción q.

Ejemplo 7. Supongamos que la función de costes totales de la empresa de bicicletas ahora es

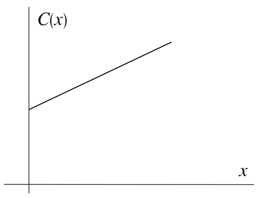
$$C(q) = 50.000 + 25q + 0{,}001q^2$$

En este caso $C'(q) = 25 + 0{,}002q$. Así el coste marginal de producción depende de la cantidad que se produce. Por ejemplo para 100 unidades el coste marginal es de 25,2 euros y para 1000 de 252 euros.

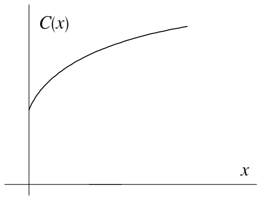
Por otro lado en los apartados 1 y 2 se observó que el signo de la primera derivada de una función f informa sobre los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la misma, así como que la segunda derivada determina los intervalos de convexidad/concavidad de la función. A continuación utilizaremos la primera y segunda derivada de una función para describir el crecimiento y la concavidad o convexidad de dos funciones económicas.

Ejemplo 8. Sea $C(x)$ una función de costes estrictamente crecientes, esto es, cuantas más unidades se producen de un bien, mayores son los costes de producción $C(x)$. Esto implica que $C'(x) > 0$.
Para una caracterización más exacta del crecimiento de los costes añadimos información sobre la curvatura de la función de costes, esto es el crecimiento/decrecimiento de los costes marginales $C'(x)$. Examinemos algunos casos.

1. *Costes lineales:* $C'(x) > 0$ y $C''(x) = 0$. En este caso, la función de costes marginales es constante.

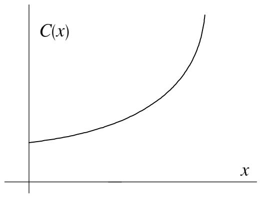


2. *Costes marginales decrecientes:* $C'(x) > 0$ y $C''(x) < 0$ (cóncava). En este caso la gráfica de C es de la forma



Se observa que, en efecto, los costes aumentan si se producen más unidades, pero que cuanto más se produce, menos cuesta producir una unidad adicional.

3. *Costes marginales crecientes:* $C'(x) > 0$ y $C''(x) > 0$ (convexa). En este caso la gráfica de C es de la forma

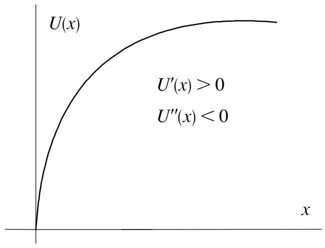


Ahora el coste de producir una unidad adicional es creciente.

Ejemplo 9. Una función de utilidad neoclásica $U'(x) > 0$ $U(x)$ se caracteriza por:

- U es creciente; a mayor consumo del bien x, aumenta el nivel de utilidad y, por tanto, .
- Utilidad marginal es decreciente; esto es, el consumo de una unidad adicional del bien x en un punto c proporciona una utilidad inferior al consumo de una unidad adicional del bien en el punto $c-1$.

Por tanto, la gráfica de una función de utilidad neoclásica es de la forma:



Finalmente, cabe destacar una de las aplicaciones más frecuentes del cálculo: la determinación de los valores máximos y mínimos. Téngase en cuenta cuantas veces hablamos de máximo beneficio, mínimo coste, forma óptima, etc. Podríamos abordar la tarea de *optimizar funciones de una variable* que modelizan fenómenos económicos, sólo como un ejercicio de aplicación de cálculo de extremos (máximos y mínimos) locales, tal y como se ha presentado en el apartado 1 de este tema. Sin embargo, ya que en la práctica totalidad de las aplicaciones reales (en Economía), un óptimo local que no es global carece de valor, iniciamos esta parte con un teorema que da condiciones suficientes de extremos globales de funciones de una variable. Esta herramienta utiliza la convexidad (concavidad) de la función.

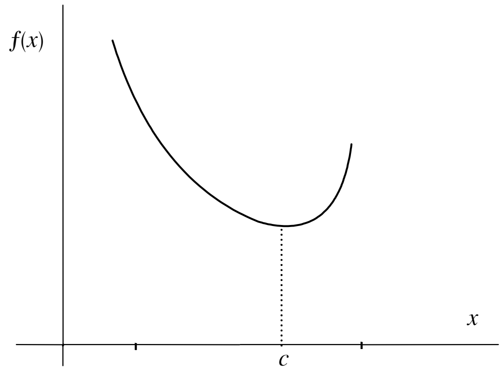
Teorema 6. *(Condiciones suficientes de extremo global)*

Supongamos que f es una función convexa y derivable en un intervalo I. Si $c \in I$ es un punto crítico de f, entonces c es un mínimo global de f en I.

La demostración se deduce del concepto de función convexa. En efecto, por ser f una función convexa y derivable en el intervalo I, se verifica que para todo $x \in I$

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$$

y, puesto que $f'(c) = 0$ tenemos que $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$, esto es, c es un mínimo global de la función f.



Observación. En el caso en que la función f fuese cóncava tendríamos que el punto crítico c es un máximo global de la función.

Si además la función f es dos veces derivable en el intervalo I, podemos utilizar las condiciones suficientes de segundo orden para funciones convexas y cóncavas, y formular el criterio anterior de la siguiente forma. Sea $c \in I$ un *punto crítico* de f:

- si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, el punto c es un *mínimo global* de f en I.
- si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, el punto c es un *máximo global* de f en I.

Con la ayuda de este resultado, para resolver un problema del tipo:

- Minimizar el coste
- Maximizar el beneficio
- Maximizar la producción

se deben seguir los siguientes pasos: Sea f una función dos veces derivable en el intervalo abierto I:

1. Calcular los puntos críticos de la función f.

   Recordemos que los puntos críticos de una función f derivable en su dominio son aquellos puntos que anulan la primera derivada de la función f y, por tanto, para localizarlos se calcula la primera derivada de la función f' y se resuelve la ecuación $f'(x)=0$.

2. Clasificar los puntos críticos.

   En primer lugar utilizamos el criterio de la segunda derivada para extremos locales y luego estudiamos, mediante las condiciones suficientes de extremo global, el carácter global de dichos extremos.

   Sea c un punto crítico de f interior a I.

   (a) Condiciones suficientes de segundo orden de extremo local. El enunciado completo de este criterio está recogido en el teorema 3.
   - si $f''(c)>0$ entonces c es un mínimo local de f,
   - si $f''(c)<0$ entonces c es un máximo local de f,
   - si $f''(c)=0$ utilizamos derivadas de orden superior.

   (b) Condiciones suficientes de extremo global. Calculamos la segunda derivada de la función f y:
   - si $f''(c)\geq 0$ para todo $x\in I$, los puntos críticos son *mínimos globales* de f,
   - si $f''(c)\leq 0$ para todo $x\in I$, los puntos críticos son *máximos globales* de f.

Ejemplo 10. Un cierto artículo tiene una función de demanda dada por

$$p(x)=100-\frac{x^2}{2}$$

y la función de coste total es igual a

$$C(x)=40x+375$$

¿A qué precio se alcanza el beneficio máximo?

Solución:

La función beneficio es igual a ingresos menos costes, es decir

$$B(x)=I(x)-C(x)=p(x)x-C(x)=x\left(100-\frac{x^2}{2}\right)-(40x+375)=60x-\frac{x^3}{2}-375.$$

- Cálculo de los puntos críticos de $B(x)$

$$B'(x)=60-\frac{3}{2}x^2=0\Leftrightarrow x^2=40\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{10}.$$

Sólo tiene sentido económico $x=2\sqrt{10}$.

- Clasificación del punto crítico

Estudiamos la segunda derivada de la función de beneficio:

$$B''(x)=-3x.$$

Puesto que $B''(x)<0$ para todo $x>0$, la función de beneficio alcanza un máximo local en el punto $x=2\sqrt{10}$. Además la función de beneficio es cóncava por lo que dicho máximo es un *máximo global de la función*. El precio que maximiza el beneficio es

$$p\left(2\sqrt{10}\right)=100-\frac{\left(2\sqrt{10}\right)^2}{2}=100-20=80.$$

Ejemplo 11. La evolución en el tiempo de la capacidad de producción P de una empresa fundada en el año 1970, está dada por la siguiente función:

$$P(t) = \frac{38.500}{700 + (t-20)^2}, \ t \geq 0$$

¿En qué año alcanzó la empresa su capacidad máxima de producción? ¿Cuál fue esa capacidad?

Solución:

- Cálculo de los puntos críticos de $P(t)$.

$$P'(t) = -\frac{77.000(t-20)}{\left(700 + (t-20)^2\right)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{77.000(t-20)}{\left(700 + (t-20)^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 20$$

- Clasificación del punto crítico.

Estudiamos la segunda derivada de la función $P(t)$**:**

$$P''(t) = \frac{77.000}{\left(700 + (t-20)^2\right)^3}(2\text{t} - 40)^2 - \frac{77.000}{\left(700 + (t-20)^2\right)^2}$$

$$P''(20) = -\frac{77.000}{(700)^2} < 0$$

Por tanto, la empresa alcanzó su capacidad máxima de producción en el año 1990 y la capacidad de producción en ese año fue de $P(20) = 55 \text{ unidades}$. Nótese que $P'(t) > 0$ para $t < 20$ y $P'(t) < 0$ para $t < 20$, por lo que en $t = 20$ se alcanza el máximo global de $P(t)$.

Ejemplo 12. Sea $B(x)$ la función de beneficios, es decir

$$B(x) = I(x) - C(x)$$

Si los ingresos y los costes están representados por funciones derivables y además la función de beneficios es cóncava, probar que el *beneficio es máximo cuando el coste marginal es igual al ingreso marginal*

Solución:.

- Cálculo de los puntos críticos de la función de beneficio.

$$B'(x) = I'(x) - C'(x) = 0 \Leftrightarrow I'(x) = C'(x)$$

- Clasificación del punto crítico.

Puesto que la función de beneficios es cóncava, tenemos que los puntos críticos son máximos globales del problema y que, en efecto, el beneficio es máximo para aquellos valores para los que el ingreso marginal es igual al coste marginal.

Ejercicios resueltos

1. Determinar los extremos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)e^x$$

Solución:

En este caso, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. La función es continua y derivable en su dominio, por ser producto de una función polinómica y una exponencial, ambas continuas y derivables. La primera derivada de la función f es

$$f'(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)e^x + (2x - 2)e^x = \left(x^2 - 1\right)e^x .$$

Los puntos críticos de f son los $x \in \mathbb{R}$ tales que $f'(x) = 0$. Por tanto, los que cumplen $\left(x^2 - 1\right)e^x = 0$. Como $e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación anterior son los x tales que $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$. Para saber si son extremos locales estudiamos la segunda derivada,

$$f''(x) = 2xe^x + \left(x^2 - 1\right)e^x = \left(x^2 + 2x - 1\right)e^x .$$

Como $f''(-1) = -2e^{-1} = -2/e < 0,\ x = -1$ es un máximo local de f y, como $f''(1) = 2e > 0$, $x = 1$ es un mínimo local de f.

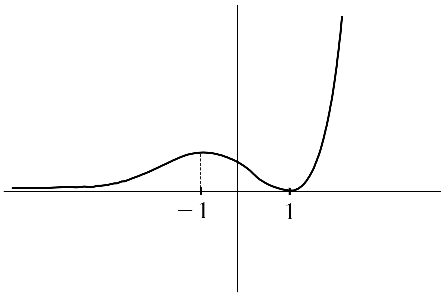
Por el estudio que acabamos de hacer, sabemos que si f'' cambia de signo lo hace en los puntos $x = -1$ y $x = 1$. Entonces, para estudiar el crecimiento y decrecimiento de f estudiamos el signo de f' en los intervalos $(-\infty,-1), (-1,1)$ y $(1,+\infty)$, ya que en estos intervalos el signo de f' permanece constante. Así, para saber de que signo se trata, basta estudiar el signo de f' en un punto de cada intervalo.

Como $-2 \in (-\infty,-1)$ y $f'(-2) = 3e^{-2} > 0$, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty,-1)$ y, por tanto, f es creciente en $(-\infty,-1)$.

Como $0 \in (-1,1)$ y $f'(0) = -1 < 0$, entonces $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-1,1)$ y, por tanto, f es decreciente en $(-1,1)$.

Por último, como $2 \in (1,+\infty)$ y $f'(2) = 3e^2 > 0$, entonces $f'(x) > 0$ para todo $x \in (1,+\infty)$ y, por tanto, f es creciente en $(1,+\infty)$.

Observando la gráfica de f verificamos los resultados obtenidos:



2. Determinar los extremos locales y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x+1)^2}$$

Solución:

En este caso, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. La función es continua y derivable en su dominio, por ser el cociente de funciones polinómicas y no anularse el denominador en dicho dominio. La primera derivada de la función f es

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(3(x+1)^2\right) - 6(x+1)x^3}{\left(3(x+1)^2\right)^2} = \frac{x^2(x+3)}{3(x+1)^3}.$$

Los puntos críticos de f son los $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ tales que $f'(x) = 0$. Por tanto, los que cumplen $\frac{x^2(x+3)}{3(x+1)^3} = 0$. Las soluciones de la ecuación anterior son los x tales que $x^2(x+3) = 0$, esto es, $x = -3, x = 0$. Para saber si son extremos locales estudiamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{\left(2x(x+3) + x^2\right)3(x+1)^3 - 9(x+1)^2 x^2(x+3)}{\left(3(x+1)^3\right)^2} = \frac{2x}{(x+1)^4}.$$

Como $f''(-3) = -3/8 < 0$, $x = -3$ es un máximo local de f. Y, como $f''(0) = 0$, pasamos a ver que valor toma f''' en $x = 0$. La tercera derivada de f es

$$f'''(x) = \frac{2(1-3x)}{(x+1)^5},$$

$f'''(0) = 2 \neq 0$ y, por tanto, al ser la primera derivada no nula en $x = 0$ de orden impar, no se trata de un extremo local, sino de un punto de inflexión de f.

Como en el caso anterior, para estudiar el crecimiento y decrecimiento de f estudiamos el signo de f' en los intervalos $(-\infty,-3),(-3,-1),(-1,0)$ y $(0,+\infty)$ (los extremos de estos intervalos son los puntos donde se anula f' y los puntos que no pertenecen al dominio de la función). Recordamos que $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

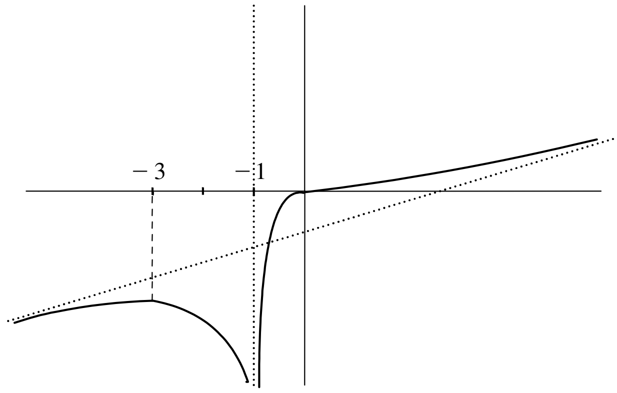
Como $-4\in(-\infty,-3)$ y $f'(-4)=16/81>0$ entonces $f'(x)>0$ para todo $x\in(-\infty,-3)$ y, por tanto, f es creciente en $(-\infty,-3)$.

Como $-2\in(-3,-1)$ y $f'(-2)=-4/3<0$, entonces $f'(x)<0$ para todo $x\in(-3,-1)$ y, por tanto, f es decreciente en $(-3,-1)$.

Del mismo modo, $-1/2\in(-1,0)$ y $f'(-1/2)=5/3>0$, entonces $f'(x)>0$ para todo $x\in(-1,0)$ y, por tanto, f es creciente en $(-1,0)$.

Por último, $1\in(0,+\infty)$ y $f'(1)=1/6>0$, entonces $f'(x)>0$ para todo $x\in(0,+\infty)$ y por tanto f es creciente en $(0,+\infty)$.

Observando la gráfica de f verificamos los resultados obtenidos:



3. Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=\left(x^2-2x+1\right)e^x$.

<u>**Solución:**</u>

Como habíamos visto en la solución del ejercicio 1, en este caso, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$. Veamos cuando se anula f'':

$$f''(x)=\left(x^2+2x-1\right)e^x=0 \Leftrightarrow \left(x^2+2x-1\right)e^x=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0.$$

Las soluciones de esta ecuación son $x = \sqrt{3} - 1$ y $x = -\sqrt{3} - 1$. Estudiamos el signo de f'' en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{3} - 1\right), \left(-\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1\right)$ y $\left(\sqrt{3} - 1, +\infty\right)$, para lo cual, como en los casos anteriores, basta ver que ocurre en un punto del intervalo correspondiente.

Así, como $-10 \in \left(-\infty, -\sqrt{3} - 1\right)$ y $f''(-10) > 0$, tenemos que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3} - 1\right)$ y, por tanto, f es convexa en el intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{3} - 1\right)$.

Del mismo modo, $x \in \left(-\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1\right)$ y $f''(0) < 0$, entonces $f''(x) < 0$ para todo $x \in \left(-\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1\right)$ y, por tanto, f es cóncava en el intervalo $\left(-\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1\right)$.

Tomando, por último, $10 \in \left(\sqrt{3} - 1, +\infty\right)$, vemos que $f''(10) > 0$ y deducimos que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \left(\sqrt{3} - 1, +\infty\right)$, siendo f convexa en $\left(\sqrt{3} - 1, +\infty\right)$.

Así vemos que los puntos de inflexión de f son $x = \sqrt{3} - 1$ y $x = -\sqrt{3} - 1$. Obsérvese la figura obtenida en el ejercicio 1.

4. Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{3(x+1)^2}$$

<u>Solución:</u>

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Recordamos la derivada segunda de la función f (véase ejercicio 2)

$$f''(x) = \frac{2x}{(x+1)^4}.$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda de f para ver los intervalos de concavidad y convexidad.

La segunda derivada se anula en $x = 0$ y, por tanto, estudiamos el signo de f'' en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 0)$ y $(0, +\infty)$, ya que $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Como en los ejercicios anteriores, para estudiar el signo de f'' en cada uno de estos intervalos, bastaría estudiar el signo de un punto interior de cada uno de ellos. En este caso, al ser $f''(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^4}$ se observa fácilmente que $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ y } x \neq -1$, y que $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Por tanto, f es cóncava en $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$ y convexa en $(0,+\infty)$. El único punto de inflexión de f es, por tanto, $x = 0$. Obsérvese la figura obtenida en el ejercicio 2.

5. Representar la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = 1 + \text{sen } (2x)$$

Solución:

* *Dominio* de f: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

* *Continuidad y derivabilidad*: f es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

* *Simetrías*: Veamos si f es simétrica respecto del eje de las ordenadas o respecto del origen. Para ello, analizamos si la función es par o impar:

$$f(-x) = 1 + \text{sen } (-2x) = 1 + \text{sen } (2x) = f(x).$$

Como la función es par, su gráfica es simétrica respecto al eje de las ordenadas.

* *Periodicidad*: $f(x+T) = 1 + \text{sen } \big(2(x+T)\big) = 1 + \text{sen } (2x + 2T)$. Por ser la función $\text{sen } x$ una función periódica de período 2π, obtenemos que $f(x+T)$ es igual a $f(x) = 1 + \text{sen } (2x)$ cuando T es un múltiplo entero de π. Como el período de la función es el menor de ellos, $T = \pi$. Para obtener la gráfica de la función basta que la analicemos en el intervalo $[0, \pi)$, por lo que todo el análisis posterior (salvo el estudio de las asíntotas) se realizará únicamente sobre dicho intervalo.

* *Corte con el eje de las abscisas*: $f(x) = 1 + \text{ sen } (2x) = 0 \Leftrightarrow x = 3\pi/4$.

* *Asíntotas*

1. Asíntotas horizontales: La función f no tiene asíntotas horizontales pues no existe ni $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ni $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. Asíntotas verticales: La función seno está acotada entre -1 y 1 y, por tanto, $f(x)=1+\text{ sen }(2x)$ está acotada entre los valores 0 y 2.

   Luego f no tiene ninguna asíntota vertical.

3. Asíntotas oblicuas: Los límites

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\text{sen }(2x)}{x}=0$$

   pues $(1+\text{ sen }(2x))$ está acotada, pero los límites

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-0\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}(1+\text{sen }(2x))$$

   no existen, luego f no tiene ninguna asíntota oblicua.

* *Puntos críticos. Extremos locales y puntos de inflexión.*

Calculamos la primera y la segunda derivada de f.

$$f'(x)=2\cos(2x),\ f''(x)=-4\text{sen}(2x)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)=0\Leftrightarrow x=\pi/4\,,3\pi/4\ .$$

Estudiamos el valor de la derivada segunda en estos puntos:

$$f''(\pi/4)=-4<0, f''(3\pi/4)=4>0\ .$$

Luego $x=\pi/4$ es un máximo y $x=3\pi/4$ es un mínimo.

* *Crecimiento y decrecimiento*

Estudiamos el signo de la derivada primera de f, siendo

$$f'(x)=2\cos(2x)>0\Leftrightarrow x\in[0,\pi/4)\cup(3\pi/4,\pi)$$
$$f'(x)=2\cos(2x)<0\Leftrightarrow x\in(\pi/4,3\pi/4)$$

luego f es creciente en $[0,\pi/4)\cup(3\pi/4,\pi)$ y decreciente en $(\pi/4,3\pi/4)$.

* *Concavidad y convexidad*

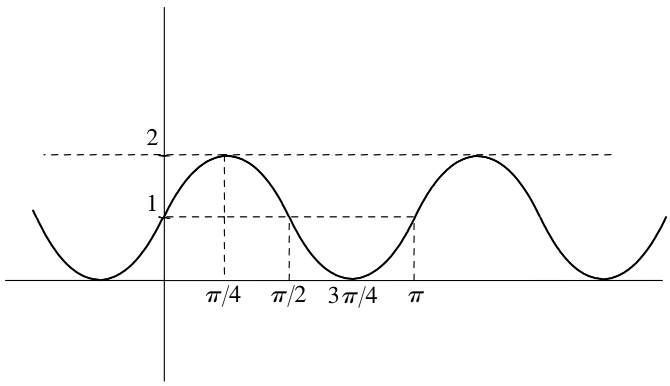
Estudiamos el signo de la derivada segunda de *f*. Esta puede cambiar de signo en los puntos x tales que $f''(x)=-4\text{sen}(2x)=0$; es decir, el único punto de inflexión de f en el intervalo $[0,\pi)$ es $x=\pi/2$. Estudiamos el signo de f'' en los intervalos $[0,\pi/2)$ y $(\pi/2\,,\pi)$:

$$f''(x)>0\Leftrightarrow x\in[0,\pi/2)\ \text{ y }\ f''(x)<0\Leftrightarrow x\in(\pi/2\,,\pi)$$

Luego la función es cóncava en $[0,\pi/2)$ y convexa en $(\pi/2\,,\pi)$, siendo el punto $x=\pi/2$ el único punto de inflexión de f.

* *Gráfica*

Con el estudio realizado ya podemos representar la gráfica de la función:



6. Representar la gráfica de la siguiente función:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$$

<u>**Solución:**</u>

* $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \text{existe} \, f(x)\} = \mathbb{R}$

* *Continuidad y derivabilidad*: f es continua por ser composición de dos funciones continuas. La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{2-3x}{3x^{1/3}(1-x)^{2/3}}$$

y, por tanto, f es derivable en $\mathbb{R} - \{0,1\}$.

* *Simetrías*: Veamos si f es simétrica respecto del eje de las ordenadas o respecto del origen. Para ello vemos si la función es par o impar:

$$f(-x) = \sqrt[3]{\left(-x^2\right)\left(1-(-x)\right)} = \sqrt[3]{x^2(1+x)} \neq \pm f(x)$$

y, por tanto, la función no es ni par ni impar, es decir, no es simétrica ni respecto del eje de ordenadas ni respecto del origen.

* *Periodicidad*: $f(x+T) = \sqrt[3]{(x+T)^2\left(1-(x+T)\right)} \neq f(x), \forall T \neq 0$. La función no es periódica.

* *Corte con el eje de las abscisas*: $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2(1-x)}=0 \Leftrightarrow x=0$ ó $x=1$.

* *Asíntotas*

1. Asíntotas horizontales: Estudiamos los siguientes límites

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2(1-x)}=-\infty\,;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2(1-x)}=+\infty$$

Por tanto, f no tiene asíntotas horizontales

2. Asíntotas verticales: Como $f(x)=\sqrt[3]{x^2(1-x)}, f(x)$ tiende a $\pm\infty$ sólo cuando x tiende a $\pm\infty$, por tanto, f no tiene asíntotas verticales.

3. Asíntotas oblicuas: Se estudian los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{x^2(1-x)}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(1-x)}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt[3]{\frac{x^2(1-x)}{x^3}}+1\right)x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}+1}{\frac{1}{x}}\underset{\left(\substack{\text{Regla de}\\ \text{L'Hôpital}}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

De forma análoga se comprueba que $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1\,;\quad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\frac{1}{3}$.

Por tanto, la recta $y=-x+\frac{1}{3}$ es una asíntota oblicua.

* *Puntos críticos. Extremos locales y puntos de inflexión*

Calculamos la primera y segunda derivada de *f*.

$$f'(x)=\frac{2-3x}{3x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}},\, f''(x)=\frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2-3x=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

Comprobamos que $f''\left(\frac{2}{3}\right)<0$ y, por tanto, $x=\frac{2}{3}$ es un máximo local de f.

* *Crecimiento y decrecimiento*: Estudiamos el signo de la derivada primera de f. Como

$$f'(x)=\frac{2-3x}{3x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}},$$

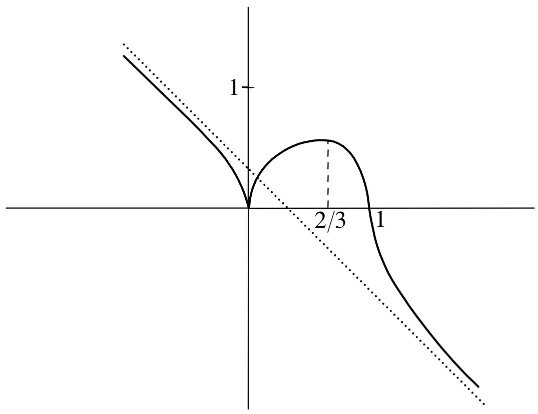
el signo de f' depende del signo de $(2-3x)/x^{1/3}$, ya que $(1-x)^{2/3}$ siempre es positivo. Los posibles cambios de signo de f' se pueden encontrar en los puntos $x=0$, $x=2/3$ y $x=1$. Siendo $f'(x)>0$ (f creciente) si y sólo si $x\in(0,2/3)$ y $f'(x)<0$ (f decreciente) si y sólo si $x\in(-\infty,0)\cup(2/3,1)\cup(1,+\infty)$. Obsérvese que la derivada primera de f no está definida en los puntos $x=0$, $x=1$. Así mismo, se observa que $x=0$ es un mínimo local de f , ya que en dicho punto f pasa de ser creciente a decreciente.

* *Concavidad y convexidad*: Estudiamos el signo de la derivada segunda de f . Como

$$f''(x)=\frac{-2}{9x^{4/3}(1-x)^{5/3}},$$

procedemos al estudio del signo de la derivada segunda de f en los intervalos $(-\infty,1)$ y $(1,+\infty)$, por ser $x^{4/3}$ siempre positivo. La función es cóncava en $(-\infty,1)$ y convexa en $(1,+\infty)$. El único punto de inflexión de f es $x=1$.

* *Gráfica*. Con el estudio realizado ya podemos representar la gráfica de la función:



7. Dadas las siguientes funciones

(a) Función de costes $C(x)=0{,}06x^3-x^2+50x+400$

(b) Función de producción $f(x)=-\dfrac{1}{60}x^3+\dfrac{5}{4}x^2+3x$

(c) Función de utilidad $U(x)=10\sqrt{x}$

se pide calcular:

i. Los costes marginales de una producción de 70 unidades.

ii. La productividad marginal de 40 unidades de factor de producción.

iii. La utilidad marginal de una cantidad consumida del bien de 4 unidades.

Solución:

i. Calculamos la primera derivada de la función de costes

$$C'(x) = 0{,}18x^2 - 2x + 50$$
$$C'(7) = 792$$

El coste adicional de producción de una unidad es de 792 u.m.

ii. Calculamos la derivada de la función de producción.

$$f'(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$$
$$f'(40) = 23$$

iii. $U'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}; U'(4) = \dfrac{5}{2}$

8. Sea la función de producción dada por

$$f(x) = ax^b (x \geq 0)$$

¿Qué condiciones deben satisfacer los parámetros a y b para que la función tome sólo valores positivos y los rendimientos marginales sean positivos y decrecientes? Las condiciones anteriores caracterizan a las funciones neoclásicas de producción.

Solución:

- En primer lugar, $f(x) > 0 \Leftrightarrow a > 0$.

- Además, los rendimientos marginales serán positivos si $f'(x) > 0$, es decir, si

$$f'(x) = abx^{b-1} > 0 \Leftrightarrow ab > 0 \Leftrightarrow b > 0 .$$

- Además, los rendimientos marginales serán decrecientes si $f''(x) < 0$, esto es, cuando

$$f''(x) = ab(-1)x^{b-2} < 0 \Leftrightarrow (b-1) < 0 \Leftrightarrow b < 1 .$$

- En conclusión, $f(x)$ es una función de producción neoclásica si $a > 0$ y $0 < b < 1$.

9. La función de coste de un artículo es

$$C(x) = 2x^2 + 5x + 18$$

Calcular la cantidad a producir si se desea maximizar el coste medio $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

Solución:

La función de coste medio esta dada por

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = 2x + 5 + \frac{18}{x}.$$

- *Cálculo de los puntos críticos de* $\overline{C}(x)$

$$\overline{C}(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Sólo tiene sentido económico $x = 3$.

- *Clasificación del punto crítico*

$$\overline{C}''(x) = \frac{36}{x^3}$$

Obsérvese que $\overline{C}''(x) > 0$ para todo $x > 0$ y, por tanto, el coste medio es mínimo cuando se producen tres unidades. Además el mínimo es *global*, pues la función de coste medio es *convexa*.

10. La rentabilidad R (dada en tanto por ciento) de una empresa depende de la cuota de mercado m del bien producido según la siguiente función

$$R(m) = -0.05m^2 + 3.6m - 35$$

¿Qué cuota de mercado hace máxima la rentabilidad de la empresa? ¿Cuál es la rentabilidad?

Solución:

- *Cálculo de los puntos críticos*

$$R'(m) = -0.1m + 3.6$$
$$R'(m) = 0 \Leftrightarrow -0.1m + 3.9 = 0 \Leftrightarrow m = 36$$

- *Clasificación del punto crítico*

$$R''(m) = -0.1 < 0$$

La cuota de mercado que maximiza la rentabilidad es del 36%. En cuyo caso la rentabilidad de la empresa es de $R(36) = 29.8\%$.

11. Sea $C(x)$ la función de coste de producción de x unidades. Supongamos que C es dos veces derivable y convexa. Probar que *el coste medio es mínimo cuando el coste medio es igual al coste marginal.*

Solución:

El coste medio está dado por: $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

- *Cálculo de los puntos críticos de $\overline{C}(x)$*

$$\overline{C}'(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right] \Rightarrow \overline{C}'(x) = \frac{1}{x}\left[C'(x) - \overline{C}(x)\right]$$

Por tanto, los puntos críticos son los valores x_0 tales que $C'(x_0) = \overline{C}(x_0)$.

- *Clasificación del punto crítico*

Examinamos la segunda derivada de la función de costes medios.

$$\overline{C}''(x) = \frac{C''(x)x - C'(x)}{x^2} - \frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} =$$
$$= \frac{C''(x)}{x} - 2\frac{C'(x)}{x} + 2\frac{C(x)}{x^3} = \frac{C''(x)}{x} + \frac{2}{x^2}\left(\overline{C}(x) - C'(x)\right)$$

Evaluamos la segunda derivada de la función de costes medios en el punto crítico x_0

$$\overline{C}''(x_0) = \frac{C''(x_0)}{\underbrace{x_0}_{>0}} + \frac{2}{x_0^{\,2}}\underbrace{\left(\overline{C}(x_0) - C'(x_0)\right)}_{=0}$$

Entonces, por el criterio de la segunda derivada para extremos locales, los puntos críticos de la función son mínimos locales y son, en efecto, aquellos valores para los que el coste medio coincide con el coste marginal.

Ejercicios propuestos

1. Representar las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $y = f(x) = e^{-x}x^2$

(b) $y = f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$

(c) $y = f(x) = \left(x^2 - 1\right)^{2/3}$

(d) $y = f(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos(x)$

2. La función de costes de una empresa es $C(q) = 1000 + 20q + q\sqrt{1+q}$. Calcular la función de coste marginal.

3. Suponga que la función de demanda de un bien es

$$Q(p) = \frac{3.000}{p^2 + 1}$$

donde Q es la cantidad y p el precio en euros. Si el precio disminuye de 9 a 8 euros, ¿cuál es el incremento aproximado de la cantidad vendida?

4. En un taller de reparaciones de coches hay una ventanilla de distribución de piezas, que en promedio atiende a 40 mecánicos por hora. El tiempo medio de espera t es inversamente proporcional al número de personas x que atienden en la ventanilla según la función $t(x) = \dfrac{20}{x}$. El salario de un mecánico es de 12 euros/hora y el de un empleado en la ventanilla es de 10 euros/hora. ¿Cuántos trabajadores deberían atender en la ventanilla, para que los costes totales (salario mas tiempo de espera) de entrega de material sean mínimos?

5. Dada la función de producción $x(p) = \sqrt{300 - 3p}$ y la función de coste $C(x) = 48 + 4x + 2x^2$, calcular:

(a) la producción que da lugar a un beneficio máximo,

(b) la producción que da lugar a un coste medio mínimo.

6. Suponga que la función de costes de una empresa es $C(q) = q^3 - 10q^2 + 100q + 196$. Determinar la cantidad que minimiza los costes de producción.

7. La función de costes de un monopolista es

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q + 98$$

y la función de demanda del producto es

$$P(q) = -10q + 120\,.$$

Si por cada unidad producida y vendida se debe pagar un impuesto de 24 euros, ¿cuál es la cantidad que maximiza los beneficios? ¿Cuál es el importe de los impuestos? ¿Cuál es el beneficio neto?