TEMA 4

Derivada y Diferencial

Contenidos:

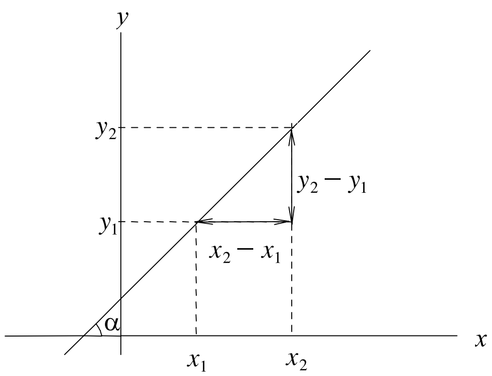
1. Introducción

La pendiente de una recta viene dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha \qquad [1]$$

donde (x_1, y_1), (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta y α es el ángulo que forma el eje OX con dicha recta (en el sentido contrario a las agujas del reloj).

La pendiente de una recta es constante, su valor m no depende de los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) elegidos. Esto, informalmente hablando, indica que la inclinación de la recta es la misma en todo punto.



Ejemplo 1. Sea la función lineal $f(x) = x + 2$ cuya gráfica está dada por el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y = f(x) = x + 2\}$, es decir, es la recta de ecuación $y = x + 2$. Dados los puntos $(1,3)$ y $(0,2)$ que pertenecen a la recta, se tiene:

$$m = \frac{2-3}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Asimismo, para los puntos $(-1,1)$ y $(3,5)$ se tendrá:

$$m = \frac{5-1}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \alpha = \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ$$

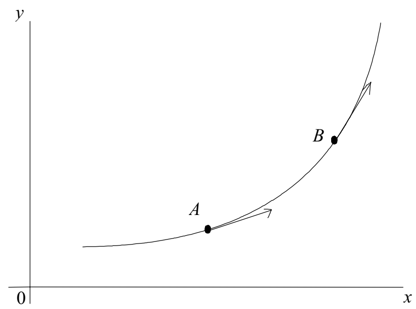
En general, para cualquier par de puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) de la recta, es decir,

$$y_1 = f(x_1) = x_1 + 2 \quad \text{e} \quad y_2 = f(x_2) = x_2 + 2,$$

se tendrá que:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + 2 - (x_1 + 2)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

Si la función f no es lineal, entonces, al no ser su gráfica una línea recta no tendrá porqué verificarse que la "inclinación" se mantenga constante en todos los puntos.

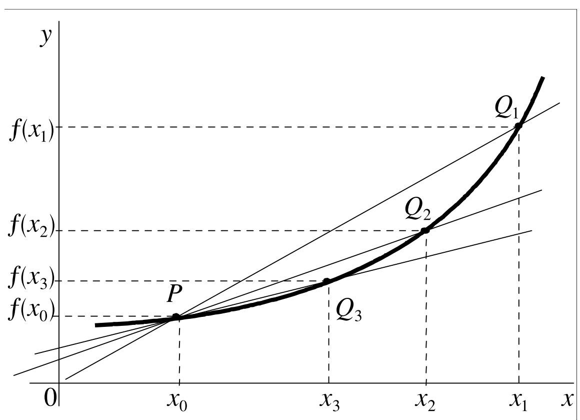


Esto que estamos llamando en términos intuitivos la inclinación de la curva en un punto, es lo que formalmente se denomina *pendiente de la curva en un punto*.

Nótese que en el caso de funciones no lineales, al hablar de pendiente es preciso especificar en qué punto se calcula, pues como acabamos de ver su valor es diferente según el punto considerado. La pendiente de una curva en un punto está determinada por la de la recta tangente a la curva en dicho punto. La pregunta que surge de manera natural es: ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto?

La forma más directa de obtener la pendiente sería dibujar la curva y la recta tangente y finalmente, de acuerdo con [1], calcular la tangente del ángulo α. Este método, sin embargo, puede conducirnos a un resultado erróneo debido a pequeñas desviaciones en el trazado del dibujo. Para obtener la pendiente de la recta tangente de una manera más precisa basta observar que dicha recta ocupa la posición límite de una serie de rectas secantes a la curva en el punto de tangencia ***P*** y en otro punto que va aproximándose a ***P***.

En efecto, sea una función f cuya gráfica está determinada por la ecuación $y = f(x)$ y sea $P = (x_0, f(x_0))$. La pendiente de la recta tangente será el límite, si existe, de las pendientes de las rectas secantes a la curva en (P, Q_1), (P, Q_2), ... cuando Q_i está cada vez más próximo a ***P***.



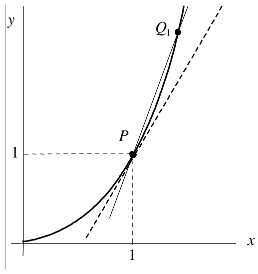
Por tanto, dados $P = (x_0, f(x_0))$ y $Q = (x', f(x'))$ con $x' \neq x_0$, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto *P* viene dada por

$$m_f(P) = \lim_{Q \to P} \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

si dicho límite existe. Este número $m_f(P)$, en caso de existir, definirá de manera exacta y precisa la "inclinación" de la curva $y = f(x)$ en $P = (x_0, f(x_0))$, siendo entonces la ecuación de la recta tangente a la curva en *P*

$$y - f(x_0) = m_f(P) \cdot (x - x_0)$$

Ejemplo 2. Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $P = (1,1)$.



Calculemos en primer lugar la pendiente de la recta secante a la curva en los puntos P y $Q_1 = (1.5, f(1.5)) = (1.5, 2.25)$

$$m_1 = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

El valor 2.5 es una estimación de la pendiente.

Para mejorar la estimación repetimos el proceso con la recta secante en *P* y un punto $Q_1 = (1.1, (1.1)^2)$ más próximo a *P* que Q_1.

$$m_2 = \frac{(1.1)^2 - 1.1}{1.1 - 1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

Teniendo en cuenta el razonamiento precedente al ejemplo, la pendiente $m_1(P)$ de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en $P = (1,1)$ será el límite de las pendientes de las rectas secantes en $P = (1,1)$ y $Q = (x, f(x)) = (x, x^2)$ cuando *Q* tiende hacia *P*, para lo cual basta que $x \to 1$ ya que, por ser $f(x) = x^2$ una función continua $f(x) \to 1$ cuando $x \to 1$.

Por tanto,

$$m_f(P) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} \qquad [2]$$

y operando resulta

$$m_f(P) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

2. Concepto de derivada

El límite [2] calculado anteriormente, que nos determina el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2$ en $P=(1,1)$ es, de hecho, la derivada de la función $f(x)=x^2$ en $x=1$. En general, la definición del concepto de derivada de una función en un punto es la siguiente:

Definición 1. *Sea* $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, I intervalo abierto de* $\mathbb{R}$*. La derivada de f en* $x_0 \in I$ *está definida por*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad [3]$$

si este límite existe. Cuando esto sucede se dice que f es derivable en $x = x_0$.

El límite [3] se denota habitualmente por

$$f'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx}\ \text{ ó }\ Df(x_0)$$

La expresión [3] también puede escribirse de forma alternativa como

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \qquad [3']$$

donde a partir de [3] : $\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \end{cases}$

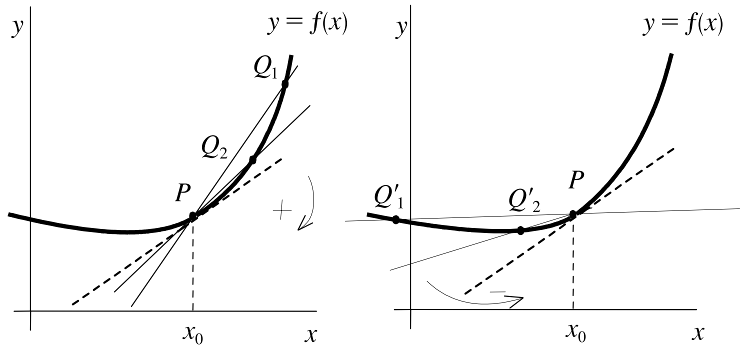
Tal como se acaba de señalar la derivada de una función $y=f(x)$ en un punto x_0 viene definida por el límite que se indica en [3] cuando éste existe, para lo cual es necesario y suficiente que:

- Exista el límite por la derecha: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ x > x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ [4]
- Exista el límite por la izquierda: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0^- \\ x < x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ [5]

y ambos límites coincidan.

Las expresiones [4] y [5] definen respectivamente lo que se denomina *derivada por la derecha* y *derivada por la izquierda* de *f* en $x = x_0$ (derivadas laterales). Estos dos conceptos extienden la definición de derivada de una función en $x = x_0$ cuando dicha función está únicamente definida en $[x_0, b)$ ó $(b, x_0]$ respectivamente.

Teniendo en cuenta el significado geométrico de la derivada, como pendiente de una curva en un punto, las expresiones [4] y [5] corresponden a las siguientes situaciones:



corresponde a la expresión [4]

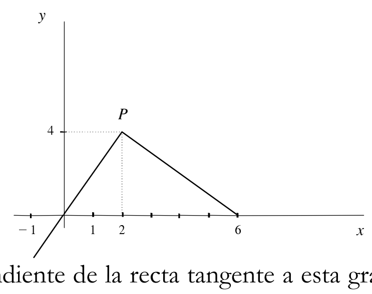
corresponde a la expresión [5]

La derivada por la derecha de f en $x = x_0$, definida por la expresión [4] cuando existe, se denota por $f'_+(x_0)$; del mismo modo la derivada por la izquierda se designa por $f'_-(x_0)$. Así, si f es derivable en $x = x_0$, entonces existe [3] y se tiene que:

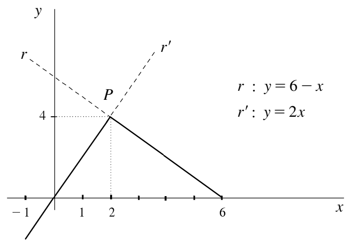
$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Ejemplo 3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [-1,2] \\ 6-x & x \in (2,6] \end{cases}$ calcular $f'(2)$.

La gráfica de f es



La derivada de f en $x = 2$ es la pendiente de la recta tangente a esta gráfica en el punto *P*. Ahora bien, si se dibuja dicha tangente como el límite de secantes en $(2, f(2))$ y $(x, f(x))$ con $x > 2$ y también con $x < 2$, se obtiene:



Las rectas *r* y *r'* son "tangentes" a la gráfica de *f* en *P*. Hay, por lo tanto, dos "pendientes". Las "pendientes" de estas rectas son los valores de las derivadas laterales de *f* en $x = 2$ y, dado que *r* y *r'* son distintas también lo serán las derivadas por la derecha y por la izquierda en $x = 2$. Por todo ello, deducimos que *f* no es derivable en $x = 2$.

Analíticamente, si calculamos las derivadas laterales, obtenemos que:

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(6-x)-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{x-2} = -1 \quad ; \quad f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

El valor –1 es precisamente la pendiente de la recta *r* y el valor 2 es la pendiente de la recta *r'*.
Así pues, existen las derivadas laterales, pero no coinciden, por lo que f no es derivable en $x = 2$.

Ejemplo 4. Dada la función $f(x) = x^2 + x$ calcular $f'(2)$.

De acuerdo con la definición:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x+3) = 5$$

Por tanto $f'(2) = 5$ y asimismo existen $f'_+(2)$ y $f'_-(2)$, siendo el valor de ambas también igual a 5.

3. Otra interpretación del concepto de derivada

Además del significado geométrico de la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, también es posible interpretar la derivada como la razón de cambio de una función respecto de una alteración en el valor de la variable independiente. Así, dada la función $y = f(x)$, el cociente

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

representa la "razón media de cambio" de la variable *y* (o de la función *f*) en el intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$ de variación de la variable independiente *x*. En otras palabras, $\Delta y / \Delta x$ es la respuesta en *y* correspondiente a un cambio unitario en *x*. Así, por ejemplo, si $E(t)$ representa el espacio recorrido en función del tiempo *t*, en un determinado movimiento, entonces $\Delta E / \Delta t$ es la velocidad media en el recorrido ΔE que ha sido realizado durante Δt unidades de tiempo. Si calculamos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad ,$$

es decir, la derivada $f'(x_0)$, obtenemos la "razón de cambio instantánea" o simplemente "razón de cambio" de *y* respecto de *x* cuando $x = x_0$.

Este límite refleja la "tendencia" en el valor (instante si la variable independiente es *t*) concreto $x = x_0$ de la respuesta de $y = f(x)$ a un cambio unitario de la variable *x*. El valor del límite proporciona información tanto de la magnitud como de la "dirección" del cambio que experimenta $f(x)$ como resultado de una alteración en *x* cuando $x = x_0$.

Ejemplo 5. Sea $e(t) = 4t^2$ el espacio recorrido por un móvil en *t* segundos. Durante el intervalo de tiempo $[2, t]$ con $t > 2$ el móvil se desplaza $e(t) - e(2) = 4t^2 - 4(2)^2$ metros, siendo la velocidad media (razón de cambio medio) en ese período

$$\frac{e(t) - e(2)}{t - 2} = \frac{4(t^2 - 2^2)}{t - 2} = 4(t + 2) \text{ metros/segundo}$$

Haciendo tender *t* hacia 2, se obtiene la velocidad del móvil, es decir, el incremento e n la función $e(t)$ por unidad de cambio en su variable independiente t en el instante $t = 2$ (razón instantánea de cambio).

$$\lim_{t \to 2} \frac{e(t) - e(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} 4(t + 2) = 16 \text{ m / sg}$$

Este límite, en realidad es un límite por la derecha ($t \to 2^+$) , pero el razonamiento puede repetirse para intervalos de la forma $[t, 2]$ con $t < 2$, obteniéndose el mismo resultado para el límite por la izquierda. Así

$$\lim_{t \to 2} \frac{e(t) - e(2)}{t - 2} = 16 \quad \text{m/sg}$$

El hecho de ser $e'(2) = 16$ significa que en $t = 2$ el espacio recorrido crece a una tasa de 16 unidades por cada unidad que se incrementa *t*.

4. Relación entre derivabilidad y continuidad

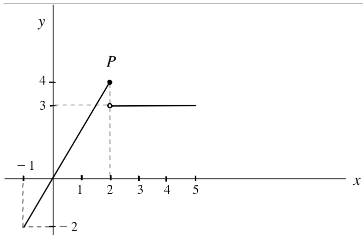
Obsérvese que la definición 1 de derivada de una función f en un punto x_0 no da por supuesto que ésta siempre exista. Únicamente puede hablarse de derivada cuando el límite indicado en [3] está definido, lo cual puede no suceder por uno de los siguientes motivos:

(a) No existe alguna de las derivadas laterales de f en x_0

(b) Existen $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$ pero no coinciden

Estas situaciones se ilustran en los ejemplos que se indican a continuación.

Ejemplo 6. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x & x\in[-1,2] \\ 3 & x\in(2,5] \end{cases}$, calcular $f'(2)$.



Por definición de derivada, se tiene que

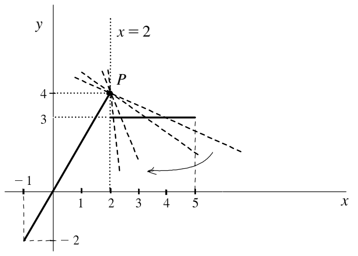
$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

Calculamos las derivadas laterales:

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-1}{x-2}\to -\infty$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

Existe la derivada por la izquierda, $f'_-(2)=2$, pero no por la derecha, pues $-\infty$ no es un número real. Por tanto, f no tiene derivada en $x=2$. Si tenemos en cuenta el significado geométrico de la derivada, en este caso se tiene:



Si se construye la recta tangente a la gráfica de f en $(2,f(2))$ como límite de rectas secantes en $(2,f(2))$ y $(x,f(x))$ con $x>2$ se obtiene como resultado la recta $x=2$, que efectivamente tiene pendiente $-\infty$.

Ejemplo 7. Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$, calcular $f'(0)$.

Si f es derivable en $x=0$, entonces se verificará que

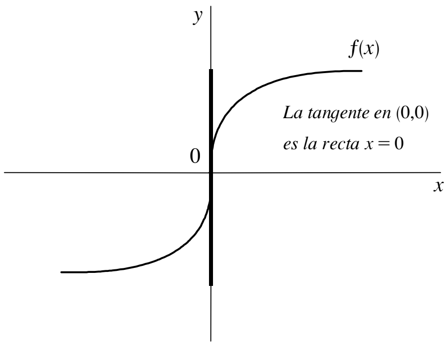
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'_-(0)=f'_+(0)$$

Calculemos las derivadas laterales:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{1/3}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{2/3}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{1/3}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2/3}}=+\infty$$

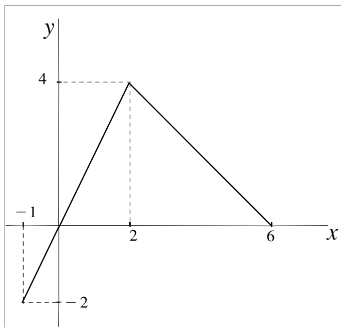
Las derivadas laterales en este caso tienen el mismo “valor”, pero no existen ya que $+\infty$ no es un número real; por tanto f no tiene derivada en $x=0$. A diferencia del ejemplo anterior, en este caso la gráfica de f tiene una única tangente en $x=0$, pero dicha recta tangente es vertical (tiene pendiente infinita).



Los ejemplos 6 y 7 ilustran la causa de no existencia de derivada indicada anteriormente en (a). Una muestra del segundo motivo de no derivabilidad señalado en (b) lo brinda el ejemplo 3, en el cual se comprobó que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [-1,2] \\ 6-x & x \in (2,6] \end{cases}$$

cuya gráfica es:



no era derivable en $x = 2$ ya que $f'_+(2) = -1 \neq 2 = f'_-(2)$.

A partir de estos ejemplos podemos observar en las gráficas algunas causas que destruyen la derivabilidad, como son:

(i) Discontinuidad (ver ejemplo 6).

(ii) Puntos "angulosos" en la gráfica de la función (ver ejemplo 3).

(iii) Tangentes verticales (ver ejemplo 7).

La inexistencia de la derivada en estos casos está motivada respectivamente por:

(i) No existe el menos una de las derivadas laterales.

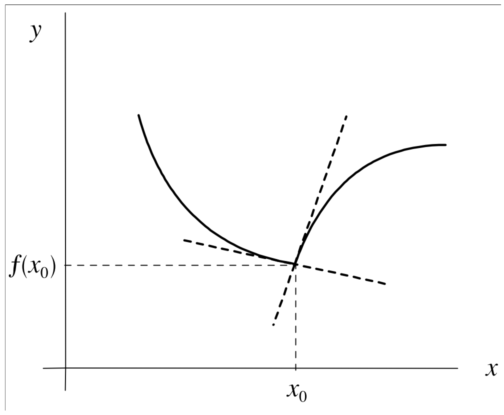
(ii) Puede que existan las dos derivadas laterales, pero si esto sucede, sus valores no coinciden.

(iii) Ambas derivadas laterales no existen.

Obsérvese que con respecto a la continuidad, el ejemplos 6 pone de manifiesto que la no continuidad de una función en un punto $x = x_0$ conlleva la no derivabilidad de la función en x_0, sin embargo la continuidad en x_0 no implica necesariamente la derivabilidad de la función en dicho punto como puede observarse en los ejemplos 3 y 7. En relación a esto se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1. *Sea f una función definida en $[a,b]$ y sea $c \in [a,b]$. Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.*

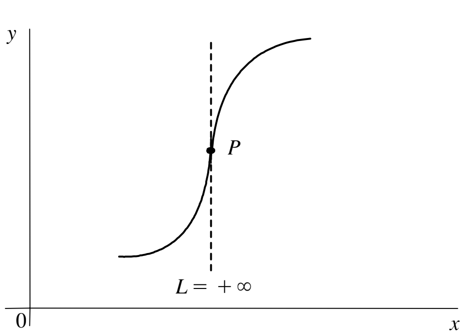
Por otra parte, los puntos en que existen, pero no coinciden las derivadas laterales y en los cuales la función es continua se denominan *puntos angulosos*. En concreto, se dice que la gráfica de una función f tiene un punto anguloso en $x = x_0$ si f es continua en x_0, existen $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$.

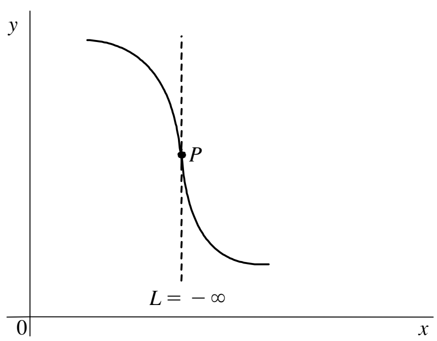


En la definición 1 de derivada de una función en un punto se considera que en el límite

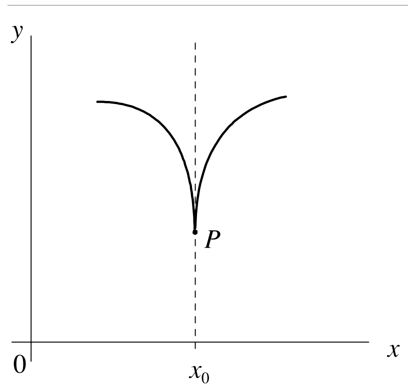
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L\,,$$

L es un número real. Podría ocurrir, sin embargo, que $L = \infty$, lo que correspondería a un punto en la gráfica de f con tangente vertical (ver ejemplo 7). También podría suceder que $L = -\infty$. En cualquiera de estos casos se dice que la curva tiene en *P pendiente infinita*.

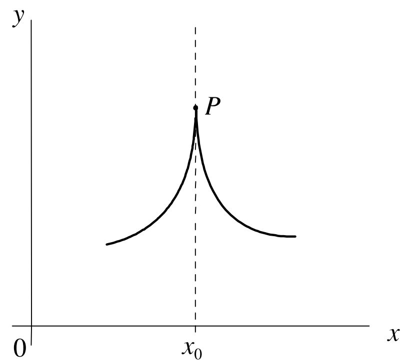




Dentro de los puntos angulosos, y en relación con esto, cabe destacar los *puntos cuspidales* como aquellos puntos en los que la función es continua, no coinciden las derivadas laterales y el valor de las mismas no es un número real. Gráficamente, éstos puntos son de la forma:

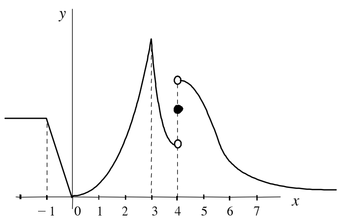


$$f'_+(x_0) = +\infty$$
$$f'_-(x_0) = -\infty$$



$$f'_+(x_0) = -\infty$$
$$f'_-(x_0) = +\infty$$

Ejemplo 8. Sea *f* una función definida en $\mathbb{R}$ cuya gráfica es:



Indicar:

(a) ¿En que puntos no es continua *f*?

(b) ¿En que puntos no es derivable *f* pero sí es continua?

(c) Indicar algún punto en que:

- La derivada de f sea positiva
- La derivada de f sea negativa
- f'_+ sea infinita
- f'_- sea distinta de f'_+

Solución:

(a) La función f no es continua en $x = 4$.

(b) La función f es continua en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 3$ pero no es derivable en dichos puntos. En concreto, $x = -1$ y $x = 0$ son puntos angulosos y $x = 3$ es un punto cuspidal.

(c) Por ejemplo:

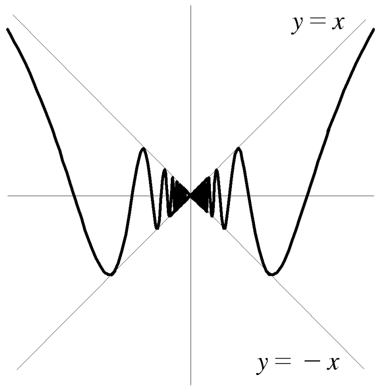
- La derivada de f es positiva en $x = 2$ ya que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(2, f(2))$ tiene pendiente positiva.
- La derivada de f es negativa en $x = 5$ pues la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(5, f(5))$ tiene pendiente negativa.

- La derivada por la derecha de f es infinita en $x = 4$.
- En $x = -1$, $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$ pues $f'_-(-1) = 0$ y $f'_+(-1) < 0$.

En ocasiones la no derivabilidad de una función f en un punto x_0 no se detecta a partir de su gráfica. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no es derivable en $x = 0$ pues no existe $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{\Delta x} = f'(0)$, pero esto no es observable en su gráfica dada por



5. Función derivada

Si f es una función definida en un intervalo abierto I tal que existe $f'(x)$ para todo $x \in I$, se dice que f es derivable en I y en este caso es posible definir la *función derivada* de f en I por:

$$\begin{array}{rcl} f': \ I & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{array}$$

Si I es un intervalo no abierto, para generalizar la definición de función derivada, basta considerar en los puntos extremos de I la existencia de las derivadas laterales correspondientes.

Una vez definida $f'(x)$ para todo $x \in I$, es posible plantearse si esta función tiene también función derivada, es decir, si existe $(f')'(x)$. Caso de existir esta función se denomina *función derivada segunda* de f y se denota por f'' o $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Reiterando este argumento pueden definirse las derivadas sucesivas de f : tercera, cuarta, quinta… cuya notación es:

$$\begin{aligned} f'(x) &\equiv \frac{df(x)}{dx} \\ f''(x) &\equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ f'''(x) &\equiv \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \\ &\vdots \\ f^{n)}(x) &\equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n} \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Dada $f(x) = x^2 + x$, calcular las funciones f' y f''.
De acuerdo con la definición 1 y la expresión [3'], para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x - (x^2 + x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2x + 1) = 2x + 1 \end{aligned}$$

es decir, $f'(x) = 2x + 1$. Por otra parte,

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) + 1 - (2x+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

y, por lo tanto, $f''(x) = 2$.

6. Reglas de derivación

La obtención de la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto cualquiera x_0, como se ha visto en el ejemplo precedente, consta de cuatro etapas o pasos:

1) Hallar $f(x_0 + \Delta x)$
2) Calcular el incremento del valor de la función $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
3) Establecer la razón de cambio o cociente incremental $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
4) Finalmente hallar el límite (si existe) $f''(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Ejemplo 10. Dada $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, calcular la derivada de f en $x = a$.
Aplicando el procedimiento antes indicado se obtiene:

1) $f(a + \Delta x) = (a + \Delta x)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \Delta x^{n-i}$ (Por el binomio de Newton)

2) $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \Delta x^{n-i} - a^n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^i \Delta x^{n-i}$

3) Cociente incremental $= \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i \Delta x^{n-1-1}$

4) $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left\{ \binom{n}{0} a^0 \Delta x^{n-1} + \binom{n}{1} a\, \Delta x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} \right\} = \binom{n}{n-1} a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}$

Puesto que a representa cualquier valor de x, podemos escribir: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

¿Será cierta la expresión obtenida en el ejemplo anterior cuando $n = 1/m$, con $m \in \mathbb{N}$ m, es decir, si $f(x) = \sqrt[m]{x}$? La respuesta es afirmativa, en efecto, por la definición de derivada,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a}$$

Obsérvese que:

$$a^2 - b^2 = (a - b)\underbrace{(a + b)}_{2 \text{ sumandos}}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\underbrace{\left(a^2 + ab + b^2\right)}_{3 \text{ sumandos}}$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)\underbrace{\left(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3\right)}_{4 \text{ sumandos}}$$

y en general, dado $n \in \mathbb{N}$

$$a^n - b^n = (a - b)\underbrace{\left(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)}_{n \text{ sumandos}}$$

Como $x-a=\left(x^{1/m}\right)^m-\left(a^{1/m}\right)^m$, aplicando la expresión anterior se tiene

$$x-a=\left(x^{1/m}-a^{1/m}\right)\left[\left(x^{1/m}\right)^{m-1}+\left(x^{1/m}\right)^{m-2}\left(a^{1/m}\right)+\ldots+\left(x^{1/,}\right)\left(a^{1/m}\right)^{m-2}+\left(a^{1/m}\right)^{m-1}\right]$$

y sustituyendo en el límite que define $f'(a)$ resulta:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{1}{\left(x^{1/m}\right)^{m-1}+\left(x^{1/m}\right)^{m-2}\left(a^{1/m}\right)+\ldots+\left(x^{1/m}\right)\left(a^{1/m}\right)^{m-2}+\left(a^{1/m}\right)^{m-1}}=$$

$$=\frac{1}{a^{\frac{m-1}{m}}+a^{\frac{m-2}{m}+\frac{1}{m}}+a^{\frac{m-3}{m}+\frac{2}{m}}+\ldots+a^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{1}{ma^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{1}{m}a^{\frac{1}{m}-1}$$

Así pues, como a representa cualquier valor de x, puede escribirse que

$$f'(x)=\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$$

En general, dada $f(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}$, se verifica que en aquellos puntos x en los que f es derivable $f'(x)=ax^{a-1}$.

Obsérvese que este procedimiento para calcular la derivada de una función no es muy operativo y puede complicarse dependiendo de la naturaleza de la función analizada. Por esta razón, suponiendo que se conoce la existencia de la función derivada, indicaremos algunas reglas de derivación (obtenidas a partir del método de los "cuatro pasos") que nos permitirán calcular las derivadas directamente:

(1) $f(x)=c$	$\to$	$f'(x)=0$
(2) $f(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}$	$\to$	$f'(x)=ax^{a-1}$
(3) $f(x)=e^x$	$\to$	$f'(x)=e^x$
(4) $f(x)=a^x$	$\to$	$f'(x)=a^x\ln a$
(5) $f(x)=\ln x$	$\to$	$f'(x)=1/x$
(6) $f(x)=\log_a x$	$\to$	$f'(x)=(1/x)\log_a e$
(7) $f(x)=\operatorname{sen} x$	$\to$	$f'(x)=\cos x$
(8) $f(x)=\cos x$	$\to$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$

Tabla A

Dado que muchas funciones son resultado de operaciones elementales de las funciones anteriores, conviene conocer cual es la derivada de la suma de dos funciones, su producto y cociente. En relación a esto se tiene

(1) Dada $h(x) = f(x) + g(x)$		$\rightarrow$	$h'(a) = f'(a) + g'(a)$
(2) Dada $h(x) = f(x) \cdot g(x)$		$\rightarrow$	$h'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
(3) Dada $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$,	con $g(a) \neq 0$	$\rightarrow$	$h'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$

Tabla B

Ejemplo 11. Calcular la derivada de $h(x) = \dfrac{3+x}{x^2+x+1}$ en $x = 1$.

La función $h(x)$ viene dada por $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde $f(x) = 3 + x$ y $g(x) = x^2 + x + 1$. Aplicando las reglas anteriores

$$h'(x) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{[g(1)]^2} \quad \text{siendo} \quad \begin{array}{l} f(1) = 3 + 1 = 4 \\ g(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} f'(1) = 1(1)^0 + 0 = 1 \\ g'(1) = 2(1) + 1(1)^0 + 0 = 3 \end{array}$$

Por tanto:

$$h'(1) = \frac{1 \cdot 3 - 4 \cdot 3}{3^2} = \frac{-9}{9} = -1$$

Las reglas de derivación indicadas en las tablas A y B no permiten obtener la derivada de funciones del tipo:

$$f_1(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 7)}$$
$$f_2(x) = e^{\frac{2\operatorname{sen}x}{x^2+5}}$$

ya que f_1 y f_2 no son el resultado de operaciones elementales entre funciones semejantes a las indicadas en la tabla A, sino composición de las mismas. Por ello, nos interesa conocer cual es la derivada de una función compuesta.

Proposición 2. *(Regla de la cadena)*

Sea f una función tal que $f = g \circ h$, siendo h y g funciones derivables en x_0 y $h(x_0)$, respectivamente. Entonces se verifica que f es derivable en x_0 y

$$f'(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)$$

Ejemplo 12. La función $f_2(x) = e^{\frac{2\operatorname{sen}x}{x^2+5}}$ es composición de

$$h(x) = \frac{2\operatorname{sen}x}{x^2+5} \quad \text{y} \quad g(t) = e^t$$

siendo h y g funciones derivables en todo punto. Así pues, aplicando la proposición 2, deducimos que $f_2(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y como

$$h'(x) = \frac{2\cos x(x^2+5) - 2\operatorname{sen}(x) \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{2(x^2+5)\cos x - 4x\operatorname{sen}x}{(x^2+5)^2}$$
$$g'(t) = e^t$$

se tiene que:

$$f_2(x) = e^{h(x)} \cdot h'(x) = e^{\frac{2\text{sen}x}{x^2+5}} \frac{2(x^2+5)\cos x - 4x\,\text{sen}x}{(x^2+5)^2}$$

La regla de la cadena nos permite determinar cuál es la derivada de la función inversa de una función. Recordemos que cuando una función $y = f(x)$ es inyectiva existe la función f^{-1} inversa de f (ver tema 2), de tal forma que para todo x perteneciente al dominio de f y f^{-1}, se verifica que

$$(f \cdot f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Esta relación entre f y su función inversa nos lleva a preguntarnos sobre la existencia y el valor de la derivada de f^{-1} y también sobre la posible relación de esta derivada con la de la función f, supuesto que existen ambas derivadas.

En concreto, se tiene que si $y = f(x)$ es una función inyectiva derivable en $x = a$, entonces la función inversa es derivable en $b = f(a)$ si $f'(a) \neq 0$, y el valor de esta derivada es igual a

$$\frac{dx}{dy}(b) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(a)} \qquad [6]$$

o con la notación habitual:

$$(f^{-1})(b) = \frac{1}{f'(a)} \qquad [6']$$

La obtención de esta expresión es inmediata a partir de la regla de la cadena. Definimos $h(x) = (g \circ f)(x)$, entonces si f es derivable en $x = a$ y g es derivable en $f(a)$ se tiene que $h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. Ahora bien, si g es la inversa de f entonces $h(x) = x$ y, por tanto, $h'(a) = 1$. Así pues

$$g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1 \Rightarrow g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

y como $f(a) = b$ se tiene

$$g'(b) = (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

siempre que $f'(a) \neq 0$.

Ejemplo 13. Hallar la derivada $\frac{dx}{dy}$ en $y = 1$ cuando $y = x^3$.

La función $y = f(x) = x^3$ es estrictamente creciente, por tanto es inyectiva y existe f^{-1}. Así pues, aplicando la expresión [6]

$$\frac{dx}{dy}(1) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\left(f^{-1}(1)\right)}$$

y como

$$y = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \text{y por tanto} \quad f^{-1}(1) = 1$$

$$f'(1) = 3(1)^3 = 3$$

entonces

$$\frac{dx}{dy}(1) = \frac{1}{3}$$

Este resultado puede calcularse también derivando directamente sobre la función inversa. Así

$$y = f(x) = x^3 \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$$

y por la fórmula (2) de la tabla A, $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$, siendo en $y = 1$, $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{3}$.

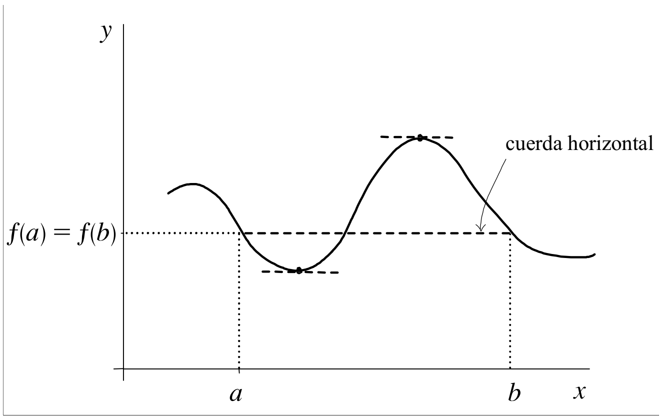
7. Teoremas de Rolle y del valor medio

Uno de los objetivos del cálculo infinitesimal es el estudio de las características de una función dada, definida en un intervalo. Interesa estudiar cuándo una función es creciente o decreciente, cuándo tiene un máximo o un mínimo, cómo se localizan estos… Existen diversos resultados dirigidos a ese objetivo, cuya demostración depende de dos resultados fundamentales: el Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio.

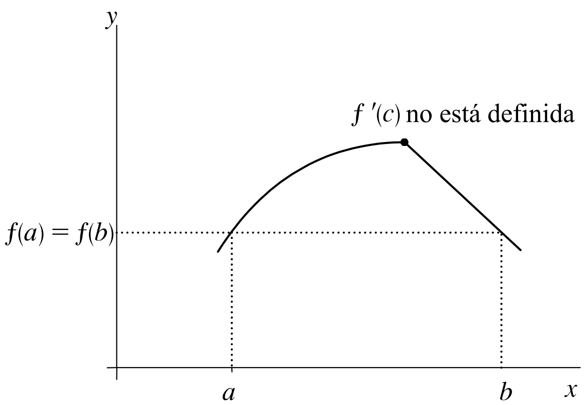
Teorema 1. *(Teorema de Rolle)*

Sea una función continua en $[a,b]$, *derivable en* (a,b) *y tal que* $f(a)=f(b)$. *Entonces existe al menos un punto* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c)=0$.

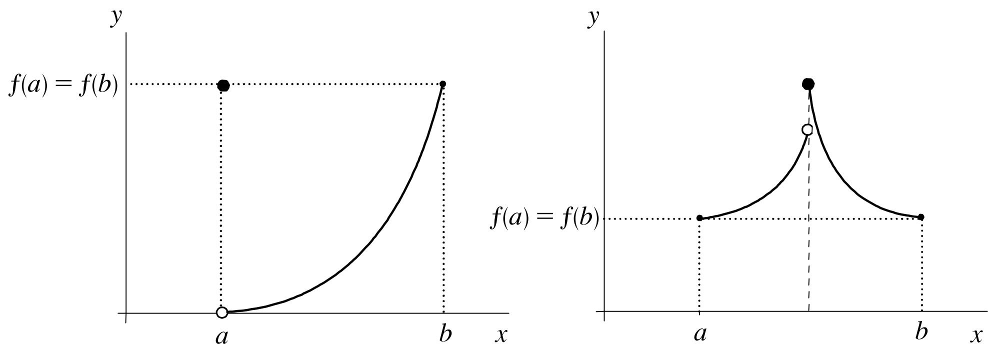
El significado geométrico del Teorema de Rolle es el siguiente: si la gráfica de una función derivable tiene una cuerda paralela al eje *x*, entonces tendrá, al menos, una tangente horizontal.



La hipótesis de que *f* sea derivable en (a,b) es esencial. Si no se cumple, no tiene porqué verificarse la conclusión del Teorema de Rolle, como se ilustra en el siguiente gráfico:



La hipótesis de continuidad de f en $[a,b]$ también es clave tal como muestra la siguiente figura:



No existe c tal que f '(c) = 0

Ejemplo 14. Dada $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$, estudiar para qué puntos del intervalo $[-1,3]$ la derivada de f es cero.

Dado que

$$x^2-2x-3=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}-1\\ 3\end{cases}$$

entonces $f(1)=f(3)=0$.

Por otra parte, como

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x+2)-(x^2-2x-3)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-2x-4-x^2+2x+3}{(x+2)^2}$$

se tiene que

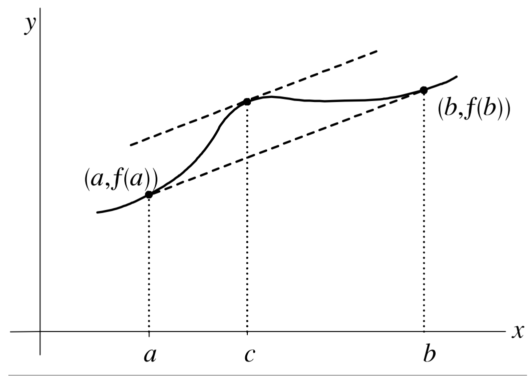
$$f'(x)=\frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow x^2+4x-1=0$$

Esta ecuación, en virtud del Teorema de Rolle, ha de tener solución en $[-1,3]$. En efecto, sus raíces son

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2}=\frac{-4\pm 2\sqrt{5}}{2}$$

verificándose que $x=-2+\sqrt{5}\in[-1,3]$ y $f'\left(-2+\sqrt{5}\right)=0$.

El Teorema del valor medio generaliza el de Rolle en el sentido de que para cualquier cuerda de la gráfica de una función derivable, existe un punto de dicha gráfica en el que la tangente es paralela a la cuerda.



Teorema 2. *(Teorema del valor medio)*

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

o lo que es igual:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

donde $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la cuerda entre los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ y $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $(c,f(c))$.

Ejemplo 15. Comprobar si se verifica el Teorema del valor medio para la función $f(x)=\sqrt{x-2}$ en el intervalo $[2,6]$.

Es fácil comprobar que se verifican las hipótesis del teorema pues *f* es continua en $[2,6]$ y derivable en $(2,6)$. Deducimos por ello que debe existir algún $c \in (2,6)$ tal que

$$\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{1}{2}=f'(c)$$

Como $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, entonces

$$f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3$$

Por tanto, el Teorema del valor medio se cumple para $x=3 \in (2,6)$.

Una importante consecuencia del Teorema del valor medio es la regla de L´Hôpital, que permite resolver ciertas indeterminaciones en el cálculo de límites utilizando el cálculo diferencial.

Teorema 3. *(Regla de L'Hôpital)*

Sean f y g funciones continuas y derivables en un intervalo abierto I tales que $f(x_0)=g(x_0)=0$, con $x_0 \in I$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I-\{x_0\}$.

Si existe $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La demostración se deduce de manera directa a partir del teorema 2 pues, para todo $x \in I$, se tiene que:

$$f(x)=f(x)-f(x_0)=f'(c_x)(x-x_0), \text{ con } c_x \text{ entre } x \text{ y } x_0$$

$$g(x)=g(x)-g(x_0)=g'(d_x)(x-x_0), \text{ con } d_x \text{ entre } x \text{ y } x_0$$

Observaciones:

1. La regla de L'Hôpital también es válida si las funciones f y g no están definidas en el punto x_0 y $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

2. El enunciado del teorema sigue siendo válido cuando $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$.

3. También puede aplicarse si x tiende a $+\infty$ ó $-\infty$.

4. Si en la expresión $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ se puede volver a aplicar la Regla de L'Hôpital.

5. La igualdad entre el límite de un cociente de funciones y el límite del cociente de sus derivadas sólo se cumple cuando se presenta una de esas indeterminaciones. En caso contrario, dicha igualdad no es cierta, como se puede apreciar si consideramos las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x+1$ para las que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0 \qquad \neq \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplo 16. Utilizando la Regla de L'Hôpital podemos calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to 1} x = 1$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen} x} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x} = 2$

(d) $\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Obsérvese que el límite $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$ presentaba una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$, que se ha transformado en una del tipo ∞/∞.

8. Diferencial de una función en un punto

Dada una función derivable en $x = x_0$, asociada al número $f'(x_0)$ puede definirse una nueva función tal como se indica en la siguiente definición:

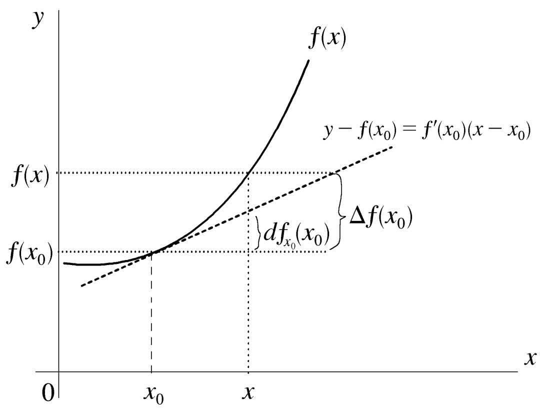
Definición 2. *Sea f definida en un intervalo abierto I y derivable en* $x = x_0 \in I$. *Se define la función diferencial de f en* x_0 *como la función lineal*

$$df_{x_0}(x) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

o también, de manera equivalente, tomando $\Delta x = x - x_0$

$$df_{x_0}(\Delta x) = f'(x_0)\cdot\Delta x$$

La diferencial df_{x_0} aproxima la variación $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ de la función *f* si *x* no está demasiado alejado de x_0.



En otras palabras, la tangente en $(x_0, f(x_0))$ a la gráfica de *f* aproxima a la curva en las cercanías de x_0, con la ventaja que supone en los cálculos el manejar una recta (polinomio de primer grado) en lugar de una curva acaso más complicada. De una manera precisa, se tiene

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{df_{x_0}(\Delta x)} = 1 \quad \text{supuesto que } f'(x_0) \neq 0$$

ya que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}\cdot f'(x_0) = 1$$

Ejemplo 17. Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$, se tiene que su función diferencial en $x = 64$ es

$$df_{64}(x) = f'(64)(x-64) = \frac{1}{16}(x-64)$$

por ser

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad f'(64) = \frac{1}{16}$$

Con ayuda de la función diferencial $df_{64}(\Delta x) = \frac{1}{16}(\Delta x)$, podemos calcular el valor aproximado de $\sqrt{67}$, para ello basta tomar $\Delta x = 67 - 64 = 3$, obteniéndose:

$$\sqrt{67} = f(67) \approx f(64) + df_{64}(3) = f(64) + f'(64)\cdot 3 = 8 + \frac{3}{16} = 8.1875$$

ya que $\Delta f(64) = f(67) - f(64) \approx df_{64}(3)$.

Ejercicios resueltos

1. Sea $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Hallar:

(a) El cociente incremental

$$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

de la función f del punto $P = (x, f(x))$ al $Q = (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. ¿Qué representa geométricamente el valor m?

(b) Si $P = (-2,2)$, hallar m para los siguientes valores de Δx: $\Delta x = 2$, $\Delta x = 0.25$, $\Delta x = -1$, $\Delta x = -0.5$, $\Delta x = 0.25$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta x = 1$, $\Delta x = -0.01$.

(c) Calcular la derivada de f en $x = -2$. ¿Cuál es el significado geométrico de dicha derivada?

Solución:

(a) Dado que $f(x) = x^2 + 2x + 2$**,** se tiene

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) + 2 = (\Delta x)^2 + 2x\Delta x + x^2 + 2x + 2\Delta x + 2$$

Así pues

$$m = \frac{(\Delta x)^2 + 2x\Delta x + 2\Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 2x + 2$$

El valor de m representa la pendiente de la recta que pasa los puntos $P = (x, f(x))$ y $Q = (x+\Delta x, f(x+\Delta x))$.

(b) Basta con sustituir en m, $x = -2$ e Δx por cada uno de los valores que se indican en el enunciado, obteniéndose que:

$$\begin{array}{ll}
\text{si } \Delta x = 2 & \Rightarrow\ m = 0 \\
\text{si } \Delta x = 0.25 & \Rightarrow\ m = -1.75 \\
\text{si } \Delta x = -1 & \Rightarrow\ m = -3 \\
\text{si } \Delta x = -0.5 & \Rightarrow\ m = -2.5 \\
\text{si } \Delta x = -0.25 & \Rightarrow\ m = -2.25 \\
\text{si } \Delta x = 0.01 & \Rightarrow\ m = -1.99 \\
\text{si } \Delta x = 1 & \Rightarrow\ m = -1 \\
\text{si } \Delta x = -0.01 & \Rightarrow\ m = -2.01
\end{array}$$

(c) De acuerdo con la definición 1:

$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x - 2) = -2$$

donde el valor $f'(-2) = -2$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2x + 2$ en el punto $x = -2$.

Obsérvese que los valores de m más próximos a $f'(2)$ corresponden a las cantidades Δx más pequeñas en valor absoluto.

2. Dada la función $f(x) = x^2 + 4x$, dibujar la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1,-3)$. Además,

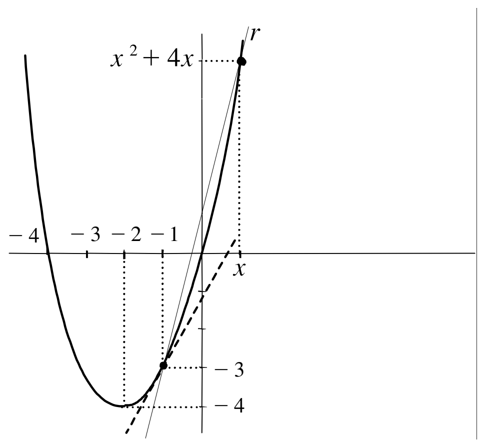
(a) Dibujar la recta que pasa por $(-1,-3)$ y $\left(x, x^2 + 4x\right)$ con $x > -1$.

(b) Hallar la pendiente de dicha recta

(c) Haciendo que x tienda a -1, hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(-1,-3)$.

<u>**Solución:**</u>

(a) Dibujemos en primer lugar la gráfica de f y sobre ella la recta que pasa por los puntos $(-1,-3)$ y $\left(x, x^2 + 4x\right)$ con $x > -1$:



(b) La pendiente de la recta r que pasa por los puntos $(-1,-3)$ y $\left(x, x^2 + 4x\right)$ viene dada por

$$m = \frac{x^2 + 4x - (-3)}{x - (-1)} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$$

(c) Calculamos el límite de la expresión que define m cuando x tiende hacia -1:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+3)=2$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2+4x$ en el punto $(-1,-3)$ tiene como valor 2.

3. Los ingresos de una empresa por la venta de x unidades de determinado producto vienen dados por la función

$$I(x)=\frac{(x+1)^2}{3}-1$$

Los gastos que ocasiona a la empresa poner a la venta x unidades del producto están determinados por

$$G(x)=3-\frac{x}{2}$$

Se pide:

(a) Calcular la razón de cambio instantáneo del nivel de ingresos cuando $x=2$.

(b) Idem para el nivel de gastos

(c) ¿Cuál es el ritmo de variación de los beneficios cuando $x=2$?

<u>**Solución:**</u>

(a) La razón de cambio instantáneo del nivel de ingresos viene dada por la derivada de $I(x)$ en $x=2$, así pues calculamos:

$$I'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{I(x)-I(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{(x+1)^2}{3}-1-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-9}{3(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{3(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)(x-2)}{3(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+4)}{3}=2$$

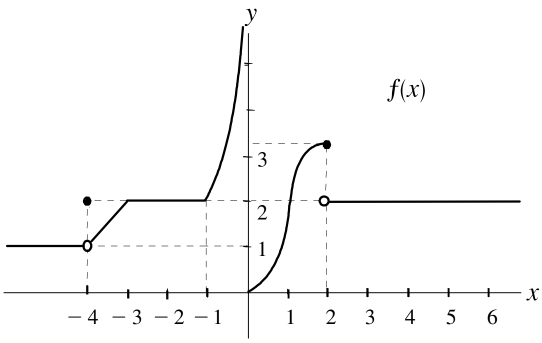
(b) En el caso de la función de gastos se tiene

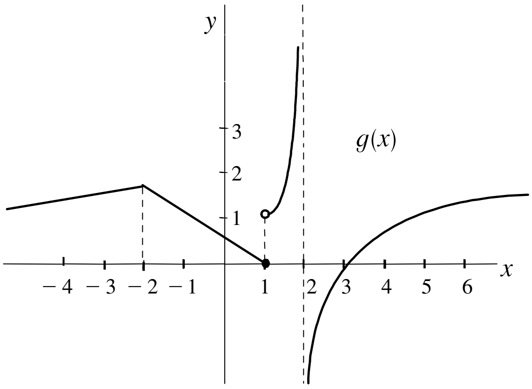
$$G'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{G(x)-G(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3-(x/2)-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2(x-2)}=\frac{-1}{2}$$

(c) El ritmo de variación de los beneficios cuando $x=2$ viene dado por $B'(2)$. Ahora bien, como $B(x)=I(x)-G(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces $B'(x)=I'(x)-G'(x)$ de donde

$$B'(2)=I'(2)-G'(2)=2-(-1/2)=5/2$$

4. Sean f y g dos funciones cuyas gráficas son:





(a) ¿En qué puntos no son continuas las funciones f y g ?

(b) ¿En qué puntos no son derivables f y g pero sí son continuas?

(c) Indicar los puntos en los que:

* Existen f'_+ y f'_- pero no coinciden

* No existe g'_+ o g'_-

* No existe f'_+ ni f'_-

* f' es positiva

Solución:

(a) La función f no es continua en los puntos $x = -4$, $x = 0$ y $x = 2$ ya que:

En $x = -4$ existe $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ pero es distinto de $f(-4)$

En $x = 0$ no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ pues $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty$

En $x = 2$ no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ pues $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

La función g no es continua en $x = 1$ y $x = 2$ pues:

En $x = 1$ no existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ ya que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$

En $x = 2$ no existe $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ pues $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \infty$

(b) La función f no es derivable a pesar de ser continua en los puntos $x=-3$, $x=-1$ y $x=1$ ya que

En $x=-3$ y $x=-1$ en existen las derivadas laterales pero no coinciden, es decir, son puntos angulosos.

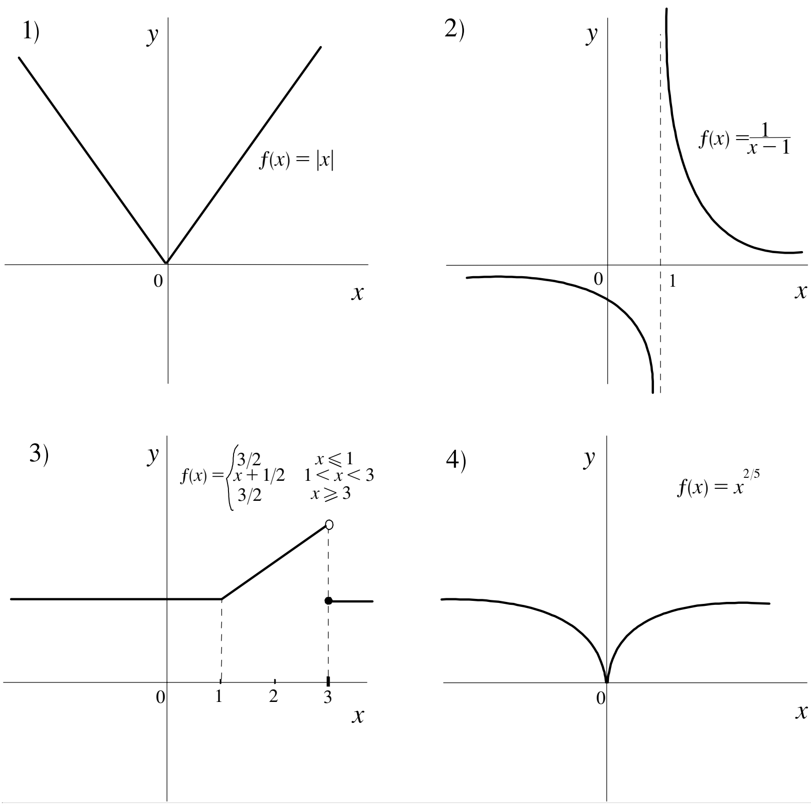
En $x=1$, las derivadas laterales son ∞.

En el caso de la función g la derivada no existe en el punto de continuidad $x=-2$ por no coincidir las derivadas laterales $g'_+(-2)$ y $g'_-(-2)$.

(c)

* Los puntos en que $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ son $x=-3$ y $x=-1$.
* No existe $g'_+(1)$. En $x=2$, como que g no está definida, no es posible calcular ninguna derivada lateral.
* En $x=-4$ no existen ni $f'_+(-4)$ ni $f'_-(-4)$. En $x=1$ no existen ni $f'_+(1)$ ni $f'_+(1)$ pues su "valor" es infinito.
* La derivada de f es positiva en aquellos puntos de su gráfica en los que la recta tangente a la misma tiene pendiente positiva, por lo tanto, esto sucede en $(-4,-3)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$.

5. Indicar para las siguientes funciones cuyas gráficas se señalan a continuación:



(a) A la vista de las gráficas, ¿en qué puntos no son derivables?

(b) ¿Por qué no existe la derivada en los puntos citados en (a)?

(c) Compruebe analíticamente las afirmaciones efectuadas en (b).

Solución:

(a) 1) No es derivable en $x = 0$.

2) No es derivable en $x = 1$.

3) No es derivable en $x = 1$ y $x = 3$.

4) No es derivable en $x = 0$.

(b) 1) Las derivadas laterales no coinciden por ser $x = 0$ un punto anguloso.

2) No existe $f(1)$ y por tanto tampoco $f'(1)$.

3) En $x = 1$, por ser un punto anguloso y en $x = 3$ por ser *f* discontinua.

4) Por ser $x = 0$ un punto cuspidal ya que $f'_-(0) = -\infty$ y $f'_+(0) = +\infty$.

(c) 1)

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

2) No existe el valor de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ en $x = 1$ pues el denominador se hace cero.

3)

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$
$$f'_-(1) == \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{x - 1} = 0$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

4)

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2/5} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{3/5}} = +\infty$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{2/5} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{3/5}} = -\infty$$

6. Esbozar la gráfica de una función f que verifique las condiciones siguientes:

(i) Toma valores positivos en $[0,1] \cup [3,5]$

(ii) Continua y creciente en $[1,5]$

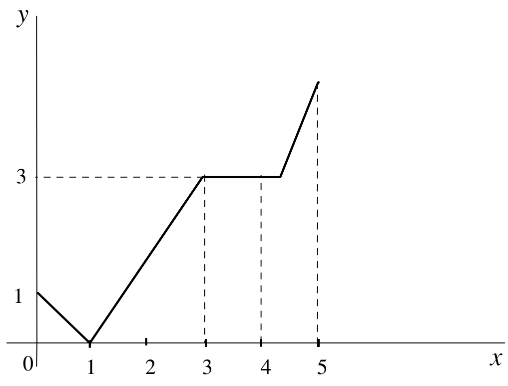
(iii) Tiene derivada nula en $x = 4$ y $f(4) = 3$

(iv) En todo $x_0 \in (0,1)$ se tiene que $f'(x_0) = -1$

(v) $f'_+(3) \neq f'_-(3)$ con $f'_+(3), f'_-(3) \in \mathbb{R}$

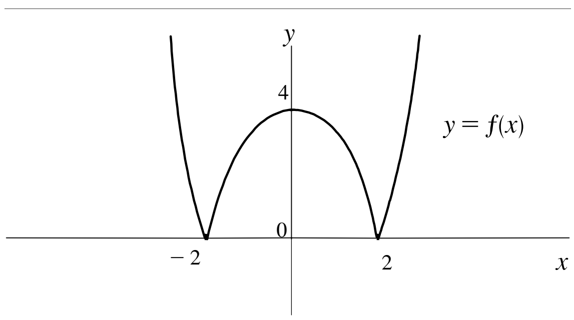
Solución:

Una posible gráfica de una función con estas características es:



7. Calcular $f'(x)$ siendo $f(x) = |x^2 - 4|$.

Solución:



Dado que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x^2 \geq 4 \\ 4 - x^2 & \text{si } x^2 < 4 \end{cases}$ o lo que es igual:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty) \\ 4 - x^2 & \text{si } x \in (-2,2) \end{cases}$$

entonces

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>2 \text{ ó } x<2\\ -2x & x\in(-2,2)\end{cases}$$

No existe derivada en $x=-2$ y en $x=2$. En efecto, para $x=2$ se tiene:

$$f'_{+}(2)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{(2+\Delta x)^2-4-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\Delta x^2+4\Delta x}{\Delta x}=4$$

$$f'_{-}(2)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{4-(2+\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{-\Delta x^2-4\Delta x}{\Delta x}=-4$$

y como $f'_{+}(2)\neq f'_{-}(2)$, entonces no existe $f'(2)$. Análogamente se comprueba que $f'_{+}(-2)\neq f'_{-}(-2)$.

8. Hallar la función derivada de

(a) $f(x)=3$

(b) $f(x)=2x$

(c) $f(x)=2x^2+1$

(d) $f(x)=\begin{cases}x^4 & x<0\\ 2x & x\geq 0\end{cases}$

Solución:

(a) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3-3}{\Delta x}=0$.

Así pues, la función derivada de f es la función nula, $f'(x)=0$.

(b) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}=2$.

Por tanto, en este caso la función derivada es $f'(x)=2$.

(c) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^2+1-\left(2x^2+1\right)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^2+2(\Delta x)^2+4x\Delta x+1-2x^2-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+4x)=4x.$$

(d) Al aplicar las reglas de derivación en este caso, se obtiene que:

Si $x \in (-\infty,0)$, $f(x) = x^4$ por lo que $f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$

Si $x \in (0,\infty)$, $f'(x) = 2x$ por lo que $f'(x) = 2$

Tenemos la función derivada definida en $\mathbb{R} - \{0\}$, analicemos, por tanto, que sucede en $x = 0$. Para ello calculamos las derivadas laterales

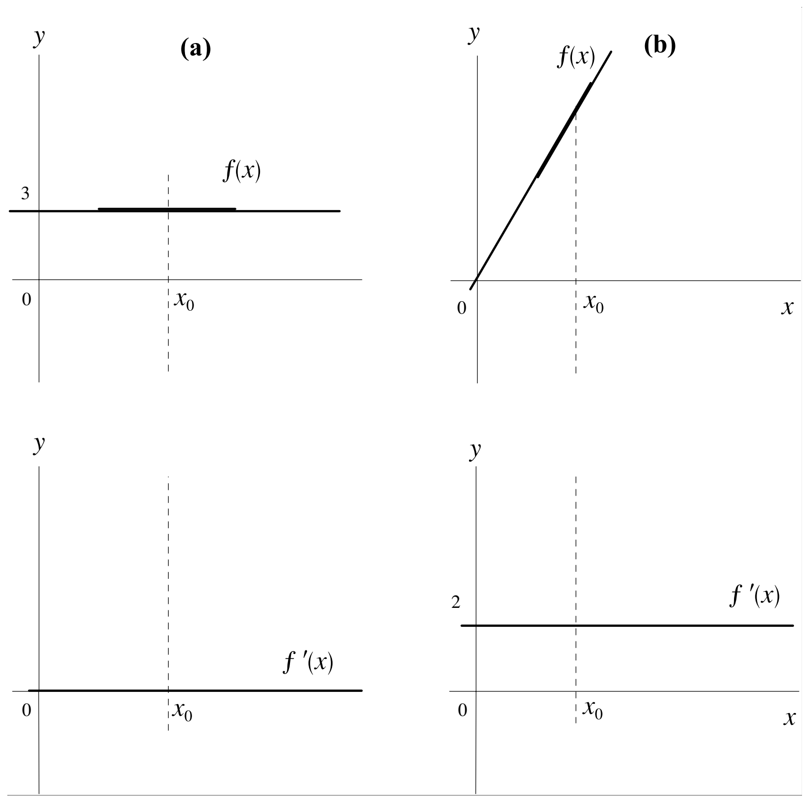
$$f'_+(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2x-0}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2 = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^4-0}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^3 = 0$$

Como $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ la función no es derivable en $x = 0$, por tanto, la función derivada de f únicamente está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ y viene dada por

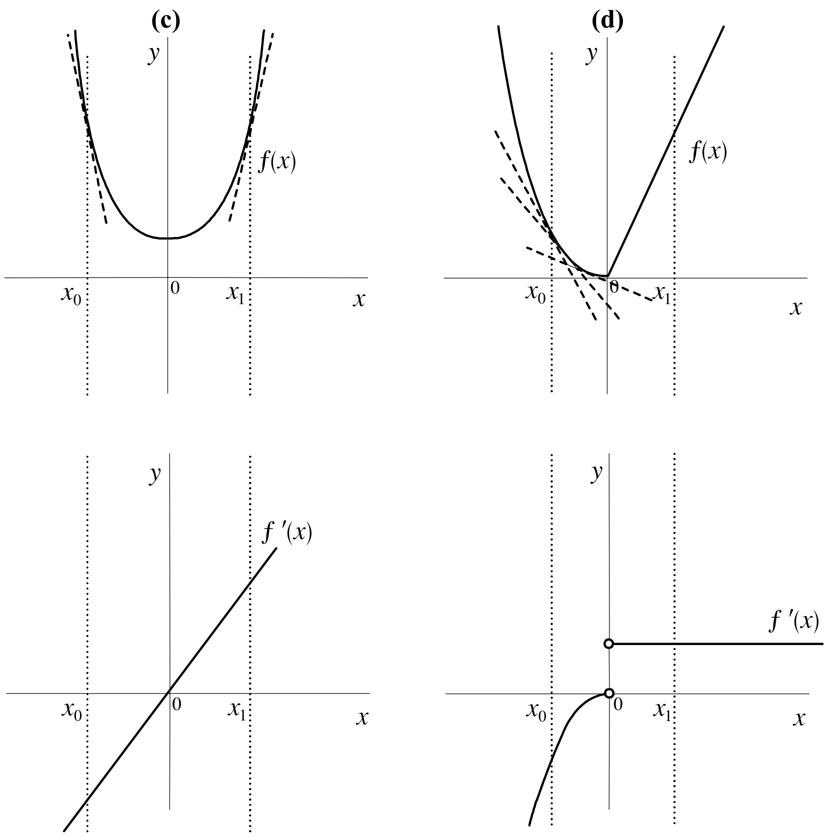
$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

Gráficamente:



Caso (a): En todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ la tangente a la gráfica de f es horizontal, por tanto tiene pendiente cero. La función derivada es pues idénticamente igual a cero.

Caso (b): En todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ la tangente a la gráfica de f coincide con la propia gráfica que es una recta, por tanto, la pendiente de la recta tangente es la de la recta $y = 2x$ en todo punto, que resulta ser 2. La función derivada es, pues, constante.



Caso (c): Para $x > 0$ la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de *f* en dichos puntos es positiva y la función derivada, por tanto, también lo es. Sin embargo, en los puntos $x < 0$, la función derivada toma valores negativos. En $x = 0$ la tangente es horizontal, es decir, con pendiente nula, por ello $f'(0) = 0$.

Caso (d): Para $x > 0$ la gráfica de la función es una recta, por lo que razonando como en (b), la función derivada ha de tomar un valor constante. En puntos $x < 0$ la pendiente de la tangente es negativa pero su valor tiende a cero (aumenta) a medida que *x* se aproxima hacia cero, de ahí que la función derivada sea negativa y creciente acercándose su valor a cero en puntos $x < 0$. En $x = 0$ la función *f* no es derivable ya que es posible trazar dos “rectas tangentes” distintas a la gráfica de *f* en $(0,0)$ cuyas pendientes son precisamente los valores $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$.

9. Hallar $f'(x)$, siendo

$$f(x) = \ln\left\{\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{x^2}}\right\}.$$

<u>**Solución:**</u>

Obsérvese que $f(x)$ no está definida en $x = 0$ ni en los intervalos $[-4,-3]$ y $[-2,-1]$. En su dominio de definición se tiene, de acuerdo con las propiedades de los logaritmos, que:

$$f(x) = \frac{1}{3}\{\ln|x+1| + \ln|x+2| + \ln|x+3| + \ln|x+4| - 2\ln|x|\}$$

Entonces, aplicando las reglas de derivación se obtiene la función derivada

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} - 2\frac{1}{x}\right)$$

definida en el mismo dominio que f.

10. Hallar la derivada de $f(x) = \left(5 + \left(3 + x^2\right)^4\right)^3$ en $x = 1$.

<u>**Solución:**</u>

La función f puede expresarse como la composición $f(x) = (g_1 \circ g_2)(x)$, donde

$$\text{-}\, g_1(u) = u^3 \quad ; \quad g_2(x) = 5 + \left(3 + x^2\right)^4$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene que $f'(1) = g_1'(g_2(1)) \cdot g_2'(1)$, con

$$g_2(1) = 261$$
$$g_1'(g_2(1)) = 3(g_2(1)) = 3 \cdot 261^2$$

$g_2'(1)$ no podemos calcularlo directamente a partir de las fórmulas de las tablas A y B

Ahora bien, $g_2(x) = (g_3 \circ g_4)(x) = g_3(g_4(x))$ donde $g_3(v) = v^4 + 5$, $g_4(x) = 3 + x^2$. Utilizando de nuevo la regla de la cadena, $g_2'(1) = g_3'(g_4(1)) \cdot g_4'(1)$, con

$$g_4(1) = 4$$
$$g_4'(1) = 0 + 2 = 2$$
$$g_3'(g_4(1)) = g_3'(4) = 4 \cdot 4^3 = 4^4 = 256$$

Así pues, $g_2'(1) = 256 \cdot 2$. Por último, se tiene $f'(1) = 3 \cdot 261^3 \cdot g_2'(1) = \left(3 \cdot 261^2\right) \cdot (256) \cdot (2)$.

Obsérvese que en este ejemplo, tras el desarrollo efectuado, se ha obtenido:

$$f'(1) = g_1'(g_2(1)) \cdot g_2'(1) = g_1'((g_3 \circ g_4)(1)) \cdot g_3'(g_4(1)) \cdot g_4'(1)$$

siendo $f(1) = (g_1 \circ g_3 \circ g_4)(1)$. Es decir, la regla de derivación de una función compuesta (regla de la cadena) es aplicable también, a partir de una generalización inmediata, al caso de composición de más de dos funciones.

11. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=\left(3x^2+1\right)^4$ (b) $f(x)=\dfrac{-4x}{(x+2)^2}$ (c) $f(t)=\sqrt{t+1}\cdot\sqrt[3]{t+1}$

(d) $f(x)=\ln\dfrac{x(x-1)}{x-2}$ (e) $f(x)=\mathrm{tg}^2\left(e^x\right)$ (f) $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

(g) $f(x)=\dfrac{1+\mathrm{sen}x}{1-\cos^2 x}$ (h) $f(x)=\mathrm{sen}(\arccos x)$ (i) $f(x)=e^{-x}\cdot\ln x$

(j) $f(x)=\ln(\mathrm{tg}\,x)$

<u>**Solución:**</u>

Calculamos las diferentes derivadas aplicando las fórmulas recogidas en las tablas A y B del apartado 4.6 y haciendo uso de la regla de la cadena.

(a) $f'(x)=4\left(3x^2+1\right)^{4-1}\dfrac{d\left(3x^2+1\right)}{dx}=4\left(3x^2+1\right)^3(3\cdot 2x)=24\left(3x^2+1\right)^3 x$

Tanto la función f como f' están definidas en $\mathbb{R}$.

(b)

$$f'(x)=\frac{\dfrac{d(-4x)}{dx}(x+2)^2-(-4x)\dfrac{d(x+2)^2}{dx}}{(x+2)^4}=\frac{-4(x+2)^2+4x\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{-4(x+2)+8x}{(x+2)^3}=\frac{4x-8}{(x+2)^3}$$

El dominio de las funciones f y f' es $\mathbb{R}-\{-2\}$.

(c) Dado que $f(t)=(t+1)^{1/2}(t+1)^{1/3}=(t+1)^{5/6}$ se tiene, en virtud de la regla de la cadena y de las fórmulas A.(2) y B.(1)

$$f'(t)=\frac{5}{6}(t+1)^{\frac{5}{6}-1}\frac{d}{dt}(t+1)=\frac{5}{6}(t+1)^{-\frac{1}{6}}=\frac{5}{6}\frac{1}{\sqrt[6]{t+1}}$$

El dominio de f es $[-1,\infty)$ y el de f' es el intervalo $(-1,\infty)$.

(d)

$$f'(x)=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x(x-1)}{(x-2)}\right)}{\dfrac{x(x-1)}{(x-2)}}=\frac{\dfrac{(2x-1)(x-2)-\left(x^2-x\right)}{(x-2)^2}}{\dfrac{x(x-1)}{(x-2)}}=\frac{(2x-1)(x-2)-\left(x^2-x\right)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-4x+2}{x(x-1)(x-2)}$$

La función f está definida si $\dfrac{x(x-1)}{x-2} > 0$, es decir, en $(0,1) \cup (2,\infty)$. El dominio de f' coincide con el de la función f.

(e) $f'(x) = 2\left[\operatorname{tg}\left(e^x\right)\right]^1 \cdot \dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{tg}\left(e^x\right)\right] = 2 \cdot \operatorname{tg}\left(e^x\right) \cdot \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\operatorname{sen} e^x}{\cos e^x}\right] =$

$$= 2 \cdot \operatorname{tg}\left(e^x\right) \cdot \frac{\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen} e^x\right) \cdot \cos e^x - \operatorname{sen} e^x \cdot \frac{d}{dx}\left(\cos e^x\right)}{\left[\cos e^x\right]^2} =$$

$$= 2 \cdot \operatorname{tg}(e^x) \cdot \frac{e^x \cos e^x \cos e^x - e^x \operatorname{sen} e^x\left(-\operatorname{sen} e^x\right)}{\left(\cos e^x\right)^2} =$$

$$= 2 \cdot e^x \cdot \operatorname{tg} e^x \cdot \frac{\cos^2 e^x + \operatorname{sen}^2 e^x}{\cos^2 e^x} = \frac{2e^x \operatorname{tg}\left(e^x\right)}{\cos^2\left(e^x\right)}$$

Las funciones f y f' no están definidas en los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $e^x = \dfrac{\pi}{2}, 3\dfrac{\pi}{2}, 5\dfrac{\pi}{2}, 7\dfrac{\pi}{2}, \ldots$

(f) $f'(x) = \dfrac{2xe^x - x^2 e^x}{\left(e^x\right)^2} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$.

En este caso, $\mathbb{R}$ es el dominio de f y f'.

(g) $$f'(x) = \frac{\cos x\left(1-\cos^2 x\right) - (1+\operatorname{sen} x)\frac{d}{dx}\left(1-\cos^2 x\right)}{\left(1-\cos^2 x\right)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos^3 x - (1+\operatorname{sen} x)(-2\cos x(-\operatorname{sen} x))}{\left(1-\cos^2 x\right)^2} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos^3 x - 2\operatorname{sen} 2x - 4\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}$$

Las funciones f y f' están definidas en $\mathbb{R} - \left\{k\pi \colon k \in \mathbb{Z} \cup \{0\}\right\}$.

(h) Antes de calcular la derivada de f, determinaremos (con ayuda de la expresión de la derivada de la función inversa) la derivada de $h(y) = \arccos(y)$. La función $x = h(y) = \arccos y$ es la inversa de $y = h^{-1}(x) = \cos x$, por lo que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-\text{sen}x}$$

Ahora bien, $x = \arccos y$ y $\text{sen}x = \sqrt{1-\cos^2 x}$, así pues, sustituyendo,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\text{ar}\cos(y))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Por lo tanto, $h'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.

La derivada de f resulta ser entonces

$$f'(x) = \cos(\arccos x)\frac{d}{dx}(\arccos x) = x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

El dominio de f es $[-1,1]$ y el de f' el intervalo $(-1,1)$.

(i) $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)\cdot \ln x + e^{-x}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x) = -e^{-x}\ln x + e^{-x}\frac{1}{x} = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$

Las funciones f y f' están ambas definidas en $(0,\infty)$.

(j) $f'(x) = \dfrac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{sen}x}{\cos x}\right)}{\frac{\text{sen}x}{\cos x}} = \dfrac{\frac{\cos x\cos x - \text{sen}x(-\text{sen}x)}{\cos^2 x}}{\frac{\text{sen}x}{\cos x}} = \dfrac{1}{\text{sen}x\ \cos x}$

El dominio de f y f' es el conjunto

$$\ldots\cup\left(-2\pi,-3\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,3\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(2\pi,5\frac{\pi}{2}\right)\cup\ldots.$$

12. Dada $y = f(x) = 3x^2 + x + 5$ definida en $[0,5]$, calcular la derivada de la función inversa de f en $y = 9$.

<u>Solución:</u>

La función f es estrictamente creciente en $[0,5]$, ya que, dados $x_1, x_2 \in [0,5]$, $x_1 > x_2$ entonces $3x_1^2 > 3x_2^2$. Por tanto, $f(x_1) = 3x_1^2 + x_1 + 5 > f(x_2) = 3x_2^2 + x_2 + 5$.

Así pues, f es inyectiva en $[0,5]$ y tiene función inversa $g = f^{-1}$ definida en ese intervalo. De acuerdo con [6]:

$$g'(9) = \frac{1}{f'(g(9))}$$

Si $y = 9 \Rightarrow 3x^2 + x + 5 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 4 = 0$. Resolviendo en x :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1 \\ -4/3 \notin [0,5] \end{cases}$$

por consiguiente $g(9) = 1$.

Por otra parte, $f'(x) = 6x + 1$, luego $f'(1) = 7$, por lo que $g'(9) = 1/7$.

13. Probar que entre dos raíces de un polinomio hay al menos una raíz de su función derivada. En base a esta afirmación, demostrar que la ecuación $x^5 + 3x^4 + x - 2 = 0$ tiene una única raíz positiva y que dicha raíz está contenida en el intervalo $(0,1)$.

<u>Solución:</u>

(a) Por el Teorema de Rolle, si $P(x)$ es un polinomio y $P(a) = P(b) = 0$, $P'(x)$ que también es un polinomio, ha de anularse en algún punto $c \in (a,b)$.

(b) Dada $f(x) = x^5 + 3x^4 + x - 2$ que es un polinomio (por tanto, continuo en $\mathbb{R}$), se tiene que $f(0) = -2$ y $f(1) = 3$. Por el Teorema de Bolzano, existe $a \in (0,1)$ tal que $f(a) = 0$, es decir, a es una raíz del polinomio. No existe ningún otro $b > 0$ para el que $f(b) = 0$, pues si así fuese, la derivada de f tendría que anularse por la parte (a) en un punto entre a y b. Pero $f'(x) = 5x^4 + 12x^3 + 1$ es siempre positiva para $x > 0$.

14. Demostrar que $1 + x \le e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, utilizando el Teorema del valor medio.

<u>Solución:</u>

Dada $f(x) = e^x$, aplicamos el Teorema del valor medio en el intervalo $[0, x]$ con $x > 0$. Se tiene entonces que existe $x_0 \in [0, x]$

$$f(x) - f(0) = e^x - e^0 = f'(x_0)(x - 0) = e^{x_0} x$$

de donde

$$e^{x} = e^{x_0}x + 1 \geq x + 1$$

ya que $e^{x_0} > 1$ y $x < 0$.

Repitiendo el razonamiento en $[0,x]$ con $x < 0$ se obtiene que existe $x_1 \in [x,0]$ tal que

$e^{0} - e^{x} = e^{x_1}(0 - x) \Leftrightarrow 1 - e^{x} = -e^{x_1}x$

de donde

$$e^{x} = e^{x_1}x + 1 \geq x + 1$$

por ser $0 < e^{x_1} < 1$.

Así pues, para todo $x \in \mathbb{R}$, se verifica que $1 + x \leq e^{x}$.

15. El radio de una esfera es de 6 cm con un posible error de medición de ± 0.002 cm. Si se calcula el volumen de la esfera usando los 6 cm como medida del radio, ¿cuál es el error que se obtendrá al hacerlo?

Solución:

Si *r* es el radio de la esfera, el volumen viene dado por la expresión:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^{3}$$

Así pues, si estimamos que el radio de la esfera es $r = 6$ cm, su volumen es

$$V(6) = \frac{4}{3}\pi \cdot 216 = 288\pi$$

Ahora bien, podría suceder que el radio sea 6 ± 0.002 . En ese caso, la variación aproximada que experimenta el volumen de la esfera puede ser calculada con ayuda de la diferencial. Se tiene entonces:

$$\Delta V \approx dV_{6}(\Delta r) = V'(6)\Delta r = 4\pi r^{2}\Big|_{r=6} \cdot \Delta r = 144\pi\Delta r$$

de manera que si $\Delta r = 0.002$, la variación del volumen es aproximadamente

$$\Delta V \approx 144\pi \cdot (0.002) = 0.288\pi \approx 0.9047808 \text{ cm}^{3}$$

Por lo tanto, el valor real del volumen de la esfera estará comprendido entre

$$288\pi - 0.9047808 \text{ cm}^{3} \text{ y } 288\pi + 0.9047808 \text{ cm}^{3}$$

Ejercicios propuestos

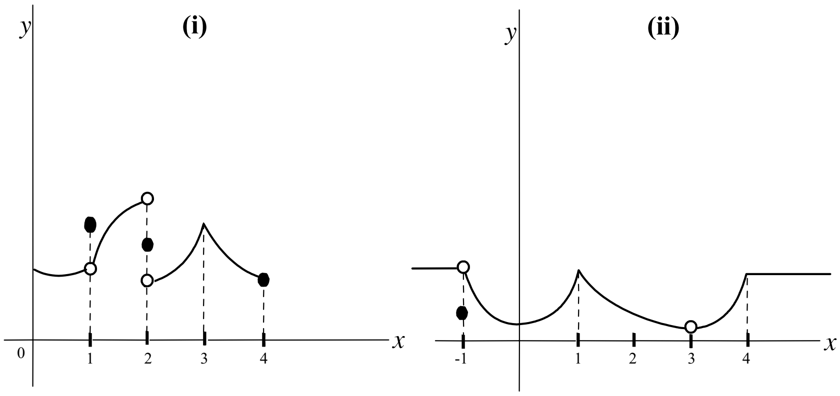
1. Calcular, haciendo uso de la definición, la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

(i) $f(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ x^2+2 & x\geq 0 \end{cases}$ $\qquad x=0$

(ii) $f(x)=\dfrac{5x}{1-3x}$ $\qquad x=2$

(iii) $f(x)=3^{x+1}$ $\qquad x=0$

2. Dadas las gráficas



Indicar: (a) ¿En qué puntos a existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ pero f no es continua en a?

(b) ¿En qué puntos a la función f es continua pero no derivable?

3. Hallar a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 1 \\ ax^4+b & x>1 \end{cases}$$

sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$

(b) $f(x)=\dfrac{3-1/x}{x+5}$

(c) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\quad x>0$

(d) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x\left(x^2+1\right)^2}{\sqrt{2x^3-1}}\right)$

(e) $f(x)=\dfrac{(x-2)^2\left(x^3-4\right)}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

(f) $f(x)=x^x$

5. Hallar la derivada segunda de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 3(x^2 - 1)^3$ (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

(c) $f(x) = x^2 e^{-x}$ (d) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot e^x$

6. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ que es paralela a la recta $x + 2y - 6 = 0$.

7. Dada $y = u^2 - 2u$ y $u = x + \dfrac{1}{x}$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$

(a) Usando la regla de la cadena

(b) Calculando la función compuesta y derivando

8. Demostrar que $p(x) = x^{2n+1} + ax + b$ no puede tener dos raíces reales siendo $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

9. Aplicar el Teorema del valor medio a la función $f(x) = x(x^2 - x - 2)$ en el intervalo $[-1,1]$.

10. Aproximar por medio de la diferencial los valores:

(a) $\sqrt[4]{83}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$ (c) tg 1/2