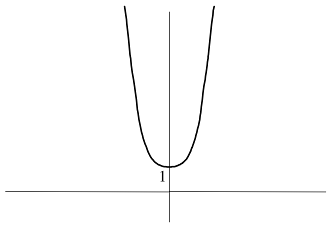
TEMA 3

Límite y continuidad

Contenidos:

1. Límite de una función en un punto

Se considera la función $f(x) = x^2 + 1$ representada en la figura

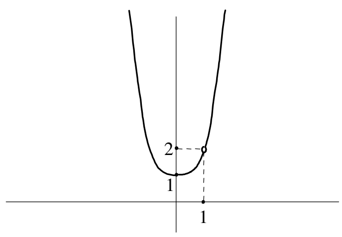


El comportamiento que tiene en puntos próximos a $x_0 = 1$, es decir, los valores que toma f cuando x se aproxima a 1 se recogen en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.99999	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$F(x)$	1.91	1.98	1.998	1.9998	2	2.0002	2.002	2.02	2.21

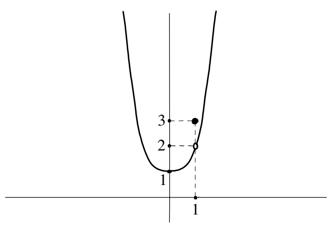
Se observa que al aproximarse x a 1 por valores cercanos a él, ya sean mayores que 1 (por la derecha de 1) o menores que 1 (por la izquierda de 1), el valor de la función se aproxima a 2. Además, $f(1) = 2$.

Sea la función $g(x) = x^2 + 1$. El dominio de definición de g es $\mathbb{R} - \{1\}$.



El comportamiento de g en un entorno de $x_0 = 1$ es el mismo que el de f, la única diferencia estriba en que $f(1) = 2$ y g no está definida en $x_0 = 1$. Por tanto g se aproxima a 2 cuando los valores de x están próximos a 1. Obsérvese que no ha influido en esta tendencia el que la función esté o no definida en $x_0 = 1$.

Sea la función h dada por $h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.



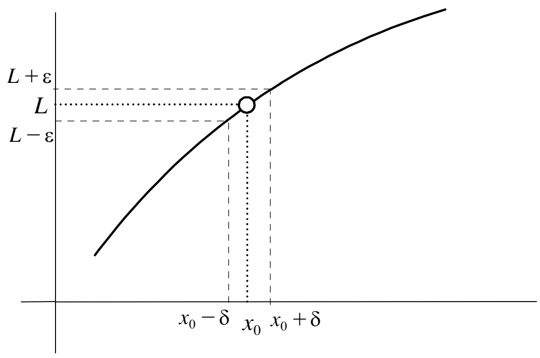
La función h también toma los mismos valores que f y g en un entorno de $x_0 = 1$, por lo que h se aproxima a 2 cuando x tiende hacia 1, sin embargo $h(1) = 3 \neq 2$. Expresado de otra forma, $h(x) \to 2$ si $x \to 1$. En consecuencia, se puede decir que :

$$\text{si } x \to 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \to 2 \\ g(x) \to 2 \\ h(x) \to 2 \end{cases}$$

esto es, que el límite de f, g y h es 2 cuando x tiende a 1. Los valores de estas tres funciones quedan arbitrariamente cerca de 2 cuando x tiende a 1 tanto por la derecha como por la izquierda, independientemente de que la función tome en el punto el mismo valor del límite (caso de f), no esté definida en $x_0 = 1$ (caso de g) o que el valor que toma la función sea distinto del valor del límite (caso de h). Es decir, de forma intuitiva se puede definir el límite de una función en un punto como el valor al que se aproxima la función cuando la variable se acerca al punto. Esta idea intuitiva se formaliza en la siguiente definición:

Definición 1. *Sea la función* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, *definida en* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *para algún* $r > 0$, *excepto a lo sumo en* x_0. *Se dice que el límite de* f *en* x_0 *es* $L \in \mathbb{R}$, *y se representa por* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, *si para cada* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* x *que cumpla* $0 < |x - x_0| < \delta$ *se verifica que* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Dicho de otra forma, los valores de f se aproximan a L cuando x se acerca a x_0. Observando la figura se deduce que fijado $\varepsilon > 0$, el valor de δ que cumple la definición no será único, también servirá cualquier $\delta_1 < \delta$ con $\delta_1 > 0$.

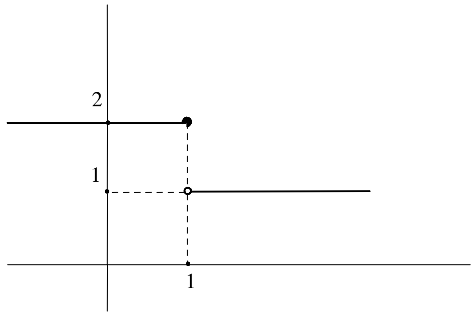


Ejemplo 1. Comprobar que $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 1) = 2$ aplicando la definición 1.

Solución: Para cada $\varepsilon > 0$ hay que encontrar un $\delta > 0$ tal que, para todo x que cumpla $0 < |x - 1| < \delta$, se verifique $|f(x) - L| < \varepsilon$. Como $|f(x) - L| = |3x - 1 - 2| < \varepsilon \Rightarrow 3|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \varepsilon/3$, si $\delta \leq \varepsilon/3$ se cumple la definición.

Al estudiar los valores a los que tiende una función cuando x se aproxima al punto x_0, hay que tener en cuenta que podemos acercarnos a x_0 por valores menores o mayores que x_0, lo que da lugar a los límites por la derecha y por la izquierda del punto, llamados límites laterales.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.



En puntos próximos a $x_0 = 1$ los valores que toma la función son diferentes según se considere

$$x > 1,\ x \to 1^+ \ \ (x \text{ tiende a 1 por la derecha}),\ f(x) \text{ tiende a 1}$$
$$x < 1,\ x \to 1^- \ \ (x \text{ tiende a 1 por la izquierda}),\ f(x) \text{ tiende a 2}$$

Se puede hablar, pues, de límite por la derecha y límite por la izquierda de 1, respectivamente. En general, y de forma intuitiva, el límite por la izquierda de f en x_0 es el valor al que se aproxima la función al acercarse x a x_0 por valores menores que éste. El límite por la derecha es el valor al que se aproxima la función al acercarse x a x_0 por valores mayores que éste. Seguidamente se formaliza la definición de estos límites.

Definición 2. *Sea la función $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ definida en $(x_0, x_0 + r)$ para algún $r > 0$. Se dice que el límite por la derecha de f en x_0 es $L_1 \in \mathbb{R}$, y se representa por $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x que cumpla $0 < |x - x_0| < \delta$ se verifica $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.*

Definición 3. *Sea la función $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ definida en $(x_0, x_0 - r)$ para algún $r > 0$. Se dice que el límite por la izquierda de f en x_0 es $L_2 \in \mathbb{R}$, y se representa por $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x que cumpla $0 < |x_0 - x| < \delta$ se verifica $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.*

Ejemplo 2. Comprobar que, dada $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<1\\ x+3 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

i) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$

ii) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=4$

Solución:

i)La función está definida como $f(x)=2x+1$ para $x<1$. En la siguiente tabla se recogen los valores que toma dicha función:

X	0.9	0.99	0.999	0.9999
f(*x*)	2.8	2.98	2.998	2.9998

Los valores de la función se aproximan a 3, por tanto $\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$.

ii) La función está definida como $f(x)=x+3$ para $x\geq 1$. La tabla de valores de f es:

X	1.1	1.01	1.001	1.0001
f(*x*)	4.1	4.01	4.001	4.0001

y f se aproxima a 4, luego $\lim_{x\to 1^+} f(x)=4$.

A continuación se enuncian dos proposiciones relativas a la existencia y unicidad del límite.

Proposición 1. *Sea la función* $f: D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}$*, si existe* $\lim_{x\to x_0} f(x)$*, este es único.*

Proposición 2. *Sea la función* $f: D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}$ *definida en* (x_0-r, x_0+r) *para algún* $r>0$ *excepto a lo sumo en* x_0*. El límite* $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ *existe si y sólo si:*

i) Existen los límites laterales $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$ *y* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L_2$ *y*

ii) Se verifica que $L_1=L_2=L$.

Es decir, para que una función tenga límite en un punto, deben existir los límites laterales (por la izquierda y por la derecha) y además ser iguales.

Ejemplo 3. Estúdiese si existe el límite de $f(x)$ en $x=1$, siendo

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<1\\ x+3 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

Solución:

Tal y como ya vimos en el ejemplo 2,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=3\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)=4$$

por tanto no existe el límite.

A continuación se recogen las propiedades de los límites:

Proposición 3. *(Propiedades de los límites)*

Sean las funciones $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ y $g: D' \to \mathbb{R}, D' \subset \mathbb{R}$ *tales que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \qquad L_1, L_2 \in \mathbb{R}$$

1) Si $f(x) = K, K \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 = K$

2) Si $f(x) = x, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 = x_0$

3) $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 + L_2$

4) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \cdot L_1$

5) $\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$

6) $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \Big/ \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1/L_2$ para $L_2 \neq 0$

7) Si $f(x) \le g(x)$ *para todo* x *de* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *y para algún* $r > 0$, *entonces* $L_1 \le L_2$.

Las propiedades enunciadas permiten el cálculo de límites sin necesidad de utilizar la definición formal, lo que simplifica mucho los cálculos. Esto se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo.

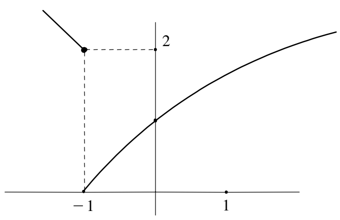
Ejemplo 4. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 2} x^3$ 2) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{x^2}$ 3) $\lim_{x\to -1} (x^3 - 2x + 1)$ 4) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 1}{x+1}$

5) $\lim_{x\to 1} x^{1/2}$ 6) $\lim_{x\to 3} x^{-2/3}$ 7) $\lim_{x\to 2} (x^3 - 2)^{-3/2}$

8) $\lim_{x\to 0} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

9) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$, $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ siendo la gráfica de f la siguiente:



10) $\lim_{x\to 2} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

Solución:

1) $\lim_{x\to 2} x^3 = \lim_{x\to 2} (x\cdot x\cdot x) = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x = 2^3$

2) $\lim_{x\to 4} \frac{1}{x^2} = \frac{\lim_{x\to 4} 1}{\lim_{x\to 4} x^2} = \frac{1}{16}$

3) $\lim_{x\to -1}(x^3-2x+1)=(-1)^3-2(-1)^2+1=-2$

4) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-1}{x+1}=\dfrac{26}{4}=\dfrac{13}{2}$

5) $\lim_{x\to 1}x^{1/2}=1^{1/2}=\sqrt{1}=1$

6) $\lim_{x\to 3}x^{-2/3}=2^{-2/3}=1\big/\sqrt[3]{4}$

7) $\lim_{x\to 2}(x^3-2)^{-3/2}=(8-2)^{-2/3}=1\big/\sqrt[3]{36}$

8) $\left.\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1\\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1\end{cases}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=1$

9) $\lim_{x\to -1^+}f(x)=0\neq \lim_{x\to -1^-}f(x)=2$; la función no tiene límite en $x=-1$

10) $\left.\begin{cases}\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-x^2+4x-2)=2\\ \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-4x+6)=2\end{cases}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2}f(x)=2$

En algunos casos, la aplicación directa de las propiedades de los límites puede dar como resultado una expresión del tipo $0/0$, denominada indeterminación por no asignar al límite que se quiere calcular un valor perfectamente determinado. Sin embargo, esas mismas propiedades de los límites pueden utilizarse para resolver algunos límites que presentan este tipo de indeterminación.

Ejemplo 5. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}$ 3) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2-ax}{x^2+ax-2a^2}$ para $a\neq 0$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$ 5) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ para $a>0$ 6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{0}{x}$

Solución:

1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2+x}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{x}=2$

3) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2-ax}{x^2+ax-2a^2}=\lim_{x\to a}\dfrac{x(x-a)}{(x-a)(x+2a)}=\lim_{x\to a}\dfrac{x}{(x+2a)}=\dfrac{a}{3a}=\dfrac{1}{3}$

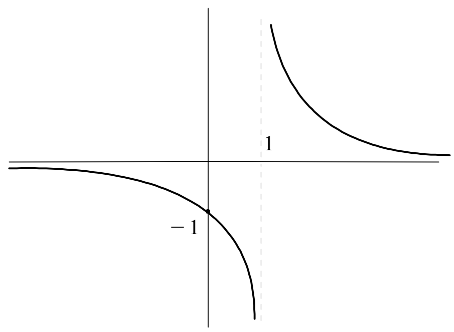
4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-1+x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x}\right)=2$

5) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\dfrac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$. Se hace notar que en este límite no existe realmente la indeterminación $0/0$, ya que x toma valores próximos a cero con lo que la función siempre valdrá cero, salvo en el punto $x=0$, en el que la función no está definida.

2. Límites infinitos y límites en el infinito

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ cuya gráfica se representa en la figura



El dominio de definición es $D = \mathbb{R} - \{1\}$. Si los valores de x se aproximan a 1 por la derecha el valor de la función crece indefinidamente, es decir, si $x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$. Si se aproxima por la izquierda $x \to 1^-$ la función decrece indefinidamente, $f(x) \to -\infty$. La función no está acotada superior ni inferiormente ya que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

En las siguientes definiciones se formaliza este concepto.

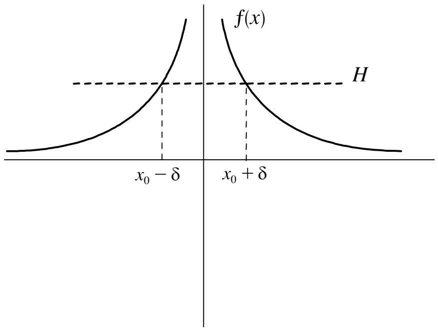
Definición 4. *Sea la función* $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ *definida en* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *para algún* $r > 0$, *excepto a lo sumo en* x_0. *Se dice que*

a) El límite de f *en* x_0 *es* $+\infty$, *y se representa por* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, *si para todo* $H > 0, H \in \mathbb{R}$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* x *que cumpla* $0 < |x - x_0| < \delta$ *se verifica que* $f(x) > H$.

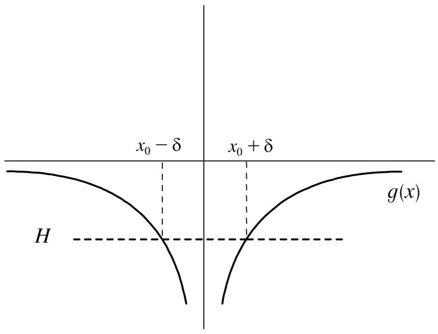
b) El límite de f *en* x_0 *es* $-\infty$, *y se representa por* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, *si para todo* $H < 0, H \in \mathbb{R}$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* x *que cumpla* $0 < |x - x_0| < \delta$ *se verifica que* $f(x) < H$.

Nótese que según esta definición el límite de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no existe en $x = 1$. Sin embargo, y a pesar de la ambigüedad que supone, algunos autores expresan $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ indicando realmente con esto que $|f(x)|$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a 1.

Las funciones $f(x) = 1/x^2$ y $g(x) = -1/x^2$ ilustran estas definiciones, como se observa en sus gráficas:

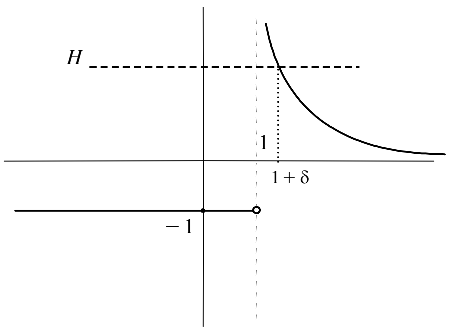


$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

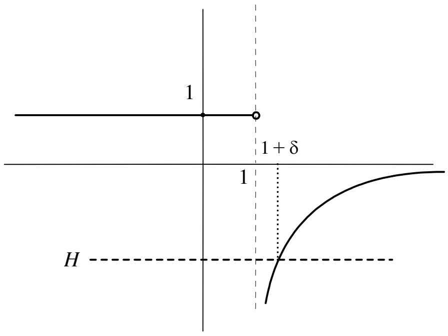


$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

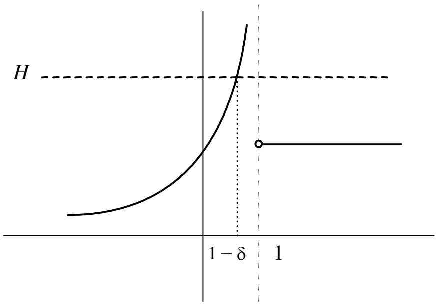
De igual forma se puede definir el concepto de límite infinito en un punto por la izquierda y por la derecha, como en el caso de los límites finitos, visto en el apartado 1. Las siguientes gráficas ilustran las definiciones de límites laterales infinitos.



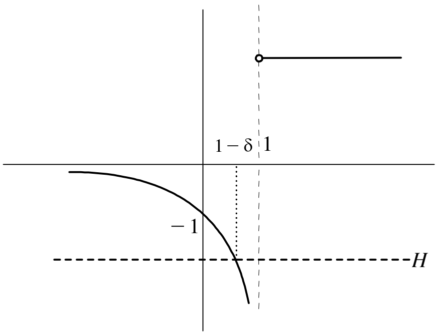
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$



$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$



$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$$

El cálculo de este tipo de límites se puede llevar a cabo aplicando las propiedades análogas a las vistas para límites finitos en el apartado 1.

Ejemplo 6. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-2}$ 2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^4}$ 3) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{(x-1)^2}$ 4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{(x-2)^3}$

Solución:

1) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty,\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$. La función no tiene límite en $x = 2$

2) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{(x-3)^4} = +\infty,\ \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^4} = +\infty$, por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^4} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{(x-1)^2} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{(x-2)^3} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^3} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-1)}{(x-2)^2} = +\infty$

Una aplicación de las últimas definiciones está en el concepto de asíntota vertical.

Definición 5. *Se dice que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de f si se verifica, al menos,* ***alguna*** *de las tres condiciones siguientes:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ ó } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ ó } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Ejemplo 7. Calcular, si existen, las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ 3) $f(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$

Solución:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}$

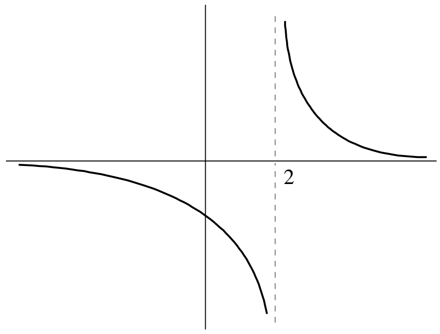
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, por lo tanto $x=1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$, por lo tanto $x=-1$ es una asíntota vertical.

2) Razonando de forma análoga a como se ha hecho en el anterior apartado se comprueba que $x=1$ es una asíntota vertical.

3) En este caso no existe ningún valor de x que haga tender a la función $f(x)$ a $+\infty$ ó $-\infty$, por lo tanto se concluye que no tiene asíntotas verticales.

Se considera ahora la función $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$



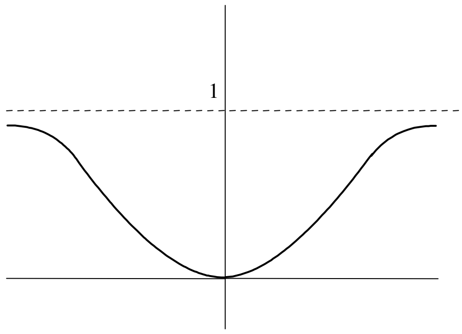
En la gráfica se observa que cuando $x\to\pm\infty$ el valor de la función se aproxima a cero. El hecho de que una función tienda a un valor finito cuando la variable crece indefinidamente se formaliza en la siguiente definición.

Definición 6.

a) *Sea la función $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Se dice que el límite de f cuando x tiende a $+\infty$ es L, y se representa por $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, si para cada $\varepsilon>0$ existe $H>0, H\in\mathbb{R}$, tal que para todo $x>H$ se verifica que $|f(x)-L|<\varepsilon$.*

b) *Sea la función $f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$. Se dice que el límite de f cuando x tiende a $-\infty$ es L, y se representa por $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, si para cada $\varepsilon>0$ existe $H<0, H\in\mathbb{R}$, tal que para todo $x<H$ se verifica que $|f(x)-L|<\varepsilon$.*

Así, la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$ verifica que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2+3}=1$



El cálculo de este tipo de límites se puede realizar aplicando las propiedades análogas a las vistas en el apartado 1 para los límites finitos.

Ejemplo 8. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1/x^3$ 4) $\lim\limits_{x\to0} 1/x^2$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^5$ 6) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$ 7) $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1}{(x-3)^3}$ 8) $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{1}{(x-3)^3}$

9) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{(x-3)^3}$ 10) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+3}$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3-2x+1}{x^4+1}$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5-2x^3+1}{x^2-1}$

Solución:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1/x^3 = 0$ 4) $\lim\limits_{x\to0} 1/x^2 = \infty$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x^5 = 0$ 6) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ 7) $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{1}{(x-3)^3} = +\infty$ 8) $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{1}{(x-3)^3} = -\infty$

9) Este límite no existe, ya que los límites por la izquierda y por la derecha de $x = 3$ no coinciden.

Si se observan los apartados 6, 7, 8 y 9, en todos ellos el límite es de la forma $L/0$ *y puede valer* $+\infty, -\infty$ *o no existir como en 9. En otros casos, pueden aparecer indeterminaciones, tal y como muestran los cuatro casos restantes:*

10) Se tiene una indeterminación del tipo ∞/∞ que puede resolverse así:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$$

11) También aparece la indeterminación ∞/∞, que operando conduce a:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{2x^2+3}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Nótese que este método es fácilmente generalizable; de hecho, se tiene que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Utilizaremos esta expresión en los últimos dos ejercicios.

12) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3-2x+1}{x^4+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$

13) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5-2x^3+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Una consecuencia directa de la definición 5 es el concepto de asíntota horizontal.

Definición 7. *Se dice que la recta* $y = L$ *es una asíntota horizontal de la función* f *si* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ ó $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Ejemplo 9. Calcular, si existen, las asíntotas horizontales de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2 + 2$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2}$

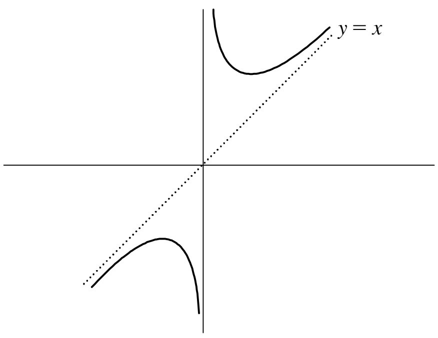
Solución:

1) $\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 + 2) = +\infty$; no existe asíntota horizontal

2) $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2} = 1$, luego $x = 1$ es asíntota horizontal

El concepto de asíntota horizontal estudia el comportamiento de funciones cuyos valores se acercan a una recta horizontal. En otros casos, es posible que la función se aproxime a una recta no horizontal (oblicua).

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2} = x + \dfrac{1}{x}$. Si $x > 0$ y $x \to +\infty, f(x) \to +\infty$, por valores próximos a la recta $y = x$. Si $x < 0$ y $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$, por valores próximos a la recta $y = x$, ya que $\dfrac{1}{x} \to 0$ tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$. La gráfica de la función es:



Definición 8. *Sea la función* $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, *se dice que la recta* $y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$ *y* $m \neq 0$, *es una asíntota oblicua de* f *si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - b) = 0 \qquad ó \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx - b) = 0$$

La pendiente *m* de la asíntota oblicua es igual a la tangente del ángulo que forma dicha recta con el eje OX, para su cálculo se tendrá en cuenta que cuando $x \to \pm\infty$ el valor de la recta se aproxima al de la función $f(x)$, es decir que $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Por otra parte, de la definición de asíntota oblicua y teniendo en cuenta las propiedades de los límites, puede calcularse el valor de b. En la siguiente proposición se recogen estos cálculos.

Proposición 4. *Sea la función* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ *e* $y = mx + b$ *una asíntota oblicua de f, entonces:*

i) $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ *ii)* $b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$

Ejemplo 10. Calcular, si existen, las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones.

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ 2) $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x-1}$ 3) $f(x) = x^3 + 2x + 1$

Solución:

1) $y = mx + b$; $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{x^2+1}{x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Luego la recta $y = x$ es asíntota oblicua.

2) $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x+1}{x(x-1)} = 2$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{2x^2+x+1}{x-1} - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{2x^2+x+1-2x^2+2x}{x-1}) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3$$

Luego la recta $y = 2x + 3$ es asíntota oblicua.

3) $y = mx + b$; $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x-x}{x} = +\infty$. Luego f no tiene asíntotas oblicuas.

3. Continuidad de funciones

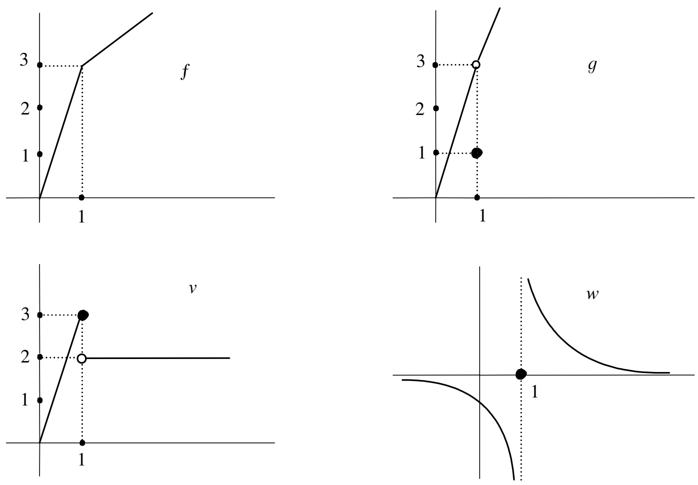
En primer lugar se estudia la continuidad de una función en un punto de forma intuitiva para posteriormente formalizar la definición.

Ejemplo 11. Estudiar el comportamiento de las siguientes funciones en un entorno del punto $x_0 = 1$

1) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ 2) $g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \ne 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

3) $v(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ 4) $w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Solución: La representación gráfica de las funciones se recoge en la sigu iente figura:



Si estudiamos los límites de estas funciones en el punto $x_0 = 1$ tenemos que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \qquad f(1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 3 \qquad g(1) = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} v(x) = 2 \ne \lim_{x\to 1^-} v(x) = 3 \qquad v(1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^+} w(x) = +\infty \ne \lim_{x\to 1^-} w(x) = -\infty \qquad w(1) = 0$$

Podemos observar que en f el valor del límite coincide con el valor que toma la función en $x = 1$, es decir, el valor de la función se aproxima a $f(1)$ cuando x se aproxima a 1.
En las otras tres funciones o bien no existe el límite, como en v y w, o el valor de este no coincide con el valor que tome la función en $x_0 = 1$, caso de g. Se podría decir que solamente la gráfica de f puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.

A continuación se formaliza el concepto de función continua.

Definición 9. *Dada la función $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, definida en un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ para algún $r > 0$, se dice que es continua en x_0 si se verifica que:*

i) Existe $f(x_0)$ *ii) Existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$* *iii) $f(x_0) = L$*

Estas tres condiciones se resumen en una sola: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, esto es:

Sea $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, *definida en* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *para algún* $r > 0$. *Se dice que f es continua en* x_0 *si para cada* $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que para todo* x *que cumpla* $|x - x_0| < \delta$ *se verifica que* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Una función es discontinua en un punto cuando no es continua en él.

Ejemplo 12. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en $x = 1$:

1) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ 2) $g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \ne 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ 3) $v(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

4) $w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \ne 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ 5) $h(x) = x + 1 \;\; x \ne 1$

Solución:

1) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$ y $f(1) = 3$, entonces f es continua en $x = 1$.

2) $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 3$ y $g(1) = 1 \ne 3$, entonces g no es continua en $x = 1$.

3) $\lim_{x\to 1^+} v(x) = 2, \lim_{x\to 1^-} v(x) = 3$ y no existe $\lim_{x\to 1} v(x)$, por lo que v no es continua en $x = 1$.

4) $\lim_{x\to 1^+} w(x) = +\infty, \lim_{x\to 1^-} w(x) = -\infty$ y no existe $\lim_{x\to 1} w(x)$, entonces w no es continua en $x = 1$.

5) h no está definida en $x = 1$, por tanto no se puede hablar de continuidad en ese punto.

Los conceptos de límites laterales aplicados al estudio de la continuidad dan lugar a las siguientes definiciones.

Definición 10. *Sea la función* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$, *se dice que*

i) f *es continua por la derecha en* x_0 *cuando* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

ii) f *es continua por la izquierda en* x_0 *cuando* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Nótese que si f es continua en x_0, es continua por la derecha y por la izquierda.

Definición 11. *Dada la función* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, *se dice que es continua en un intervalo abierto* $(a,b) \subset D$ *si es continua para todo* $x \in (a,b)$.

Es decir, una función es continua en un intervalo abierto cuando lo es en cada uno de sus puntos. Esto supone que el gráfico de la función en el intervalo estudiado es de “trazo continuo”.

Definición 12. *Dada la función* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, *se dice que es continua en un intervalo cerrado* $[a,b] \subset D$ *si es continua en* (a,b), *continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.*

Las propiedades de los límites admiten equivalencias en el estudio de la continuidad.

Proposición 5. *Sean* f *y* g *dos funciones continuas en* x_0, *se verifica que:*

1) La función $f \pm g$ *es continua en* x_0.

2) La función $f \cdot g$ *es continua en* x_0.

3) La función $a \cdot f$ *es continua en* x_0 *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

4) La función f/g *es continua en* x_0 *si* $g(x_0) \neq 0$.

5) Sean las funciones $g: D \to \mathbb{R}$, *y* $f: D' \to \mathbb{R}$, *con* $g(D) \subset D'$. *Si* g *es continua en* x_0 *y* f *es continua en* $g(x_0)$, *entonces* $f \circ g$ *es continua en* x_0.

En algunos casos el estudio de la continuidad de una función se puede realizar de manera directa. Esta es la situación que en general se tiene con las denominadas funciones "elementales" estudiadas en el apartado 5 del Capítulo 2. Así, todas las funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas, como se observa en las gráficas representadas en el citado apartado, son continuas en sus respectivos dominios.

Ejemplo 13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ 2) $g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x-3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ 3) $v(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

4) $w(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ 5) $h(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x < 0 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

1) La función es continua para todo $x_0 \in (-\infty,0)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0 - 1 = f(x_0)$ por ser una función polinómica. Análogamente, para todo $x_0 \in (0,+\infty)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0 + 1 = f(x_0)$. La única discontinuidad puede presentarse en $x_0 = 0$ y, como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 1 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 - 1$, no existe el límite en $x_0 = 0$. Por tanto, f no es continua en ese punto.

2) Si $x_0 \in (-\infty,0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = x_0^2 - 1 = g(x_0) \to g$ es continua en $(-\infty,0)$.

Si $x_0 \in (0,+\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 2x_0 - 3 = g(x_0) \to g$ es continua en $(0,+\infty)$.

Si $x_0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} (2x-3) = -3 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2-1) = -1 \to$ no existe el límite de g en $x = 0$, por lo tanto g es discontinua en ese punto.

3) Si $x_0 \in (-\infty,1) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \dfrac{x_0^3 - 1}{x_0 - 1} = v(x_0)$

Si $x_0 \in (1,+\infty) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} v(x) = x_0 + 2 = v(x_0)$

Si $x_0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} (x+2) = 3 = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + x + 1) = 3 = v(1)$

por tanto, v es continua en $\mathbb{R}$.

4) Si $x_0 \in (-\infty,0) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} w(x) = 3x_0^3 + 1 = w(x_0)$

Si $x_0 \in (0,+\infty) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} w(x) = e^{x_0} = w(x_0)$

Si $x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(e^x\right) = 1 = \lim_{x\to 0^-} (3x^2 + 1) = 1 = w(0)$

por tanto, w es continua en $\mathbb{R}$.

5) Si $x_0 \in (-1,2) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} (5-x) = 5 - x_0 = h(x_0)$, $\lim_{x\to -1^+} (5-x) = 6 = h(-1)$, luego h es continua en [-1,2).

Si $x_0 \in (2,3) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} (x^2 - 1) = x_0^2 - 1 = h(x_0)$, $\lim_{x\to 3^-} (x^2 - 1) = 8 = h(3)$,luego h es continua en (2,3].

Si $x_0 = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} (x^2 - 1) = 3 = \lim_{x\to 2^-} (5-x) = h(2) = 3$, luego h es continua en [-1,3].

4. Propiedades de las funciones continuas en un intervalo

En este apartado se recogen ciertas propiedades de las funciones continuas que resultan de gran valor para el estudio de posteriores resultados. Unas se encuentran recogidas en una proposición, y las otras dos en forma de teoremas.

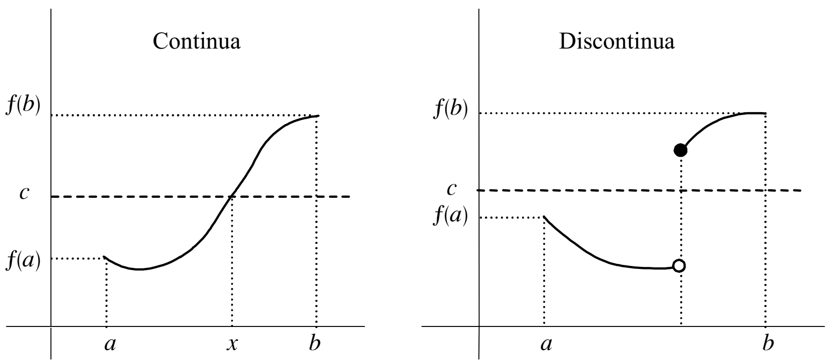
Proposición 6. *Sea la función* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$

1) *Si* f *es continua en* x_0 *y* $f(x_0) \neq 0$*, existe un entorno* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *en el cual* f *toma el mismo signo que* $f(x_0)$.
2) *Si* f *es continua en* x_0 *y toma valores positivos y negativos en cualquier entorno de* x_0*, entonces* $f(x_0) = 0$.
3) *Si* f *y* g *son funciones continuas en* x_0 *y* $f(x_0) < g(x_0)$ *entonces existe un entorno* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *en cuyos puntos* $f(x) < g(x)$.

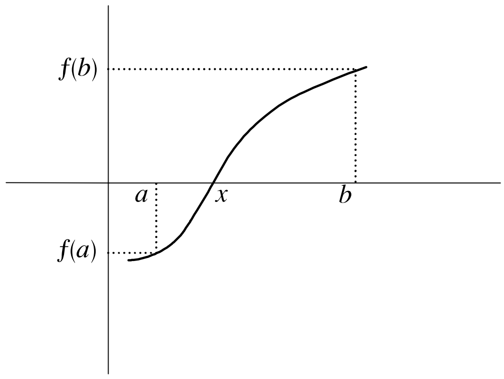
Teorema 1. *(Teorema de Bolzano)*

Si la función $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ *es continua en el intervalo cerrado* $[a,b] \subset D$ *y* $f(a) < c < f(b)$*, entonces existe algún* $x \in [a,b]$ *tal que* $f(x) = c$.

La idea que subyace en este teorema es bastante simple: si una función es continua en un intervalo cerrado su gráfica no presenta saltos ni interrupciones (véase la figura anexa), por lo que la recta horizontal $y = c$ tiene que cortar al menos una vez a la gráfica de la función.



Una consecuencia inmediata de este teorema es que si f es continua en $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo, existe un $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$. Es decir, la gráfica de f tiene que cortar al menos una vez al eje OX. Este hecho se muestra en la siguiente figura:

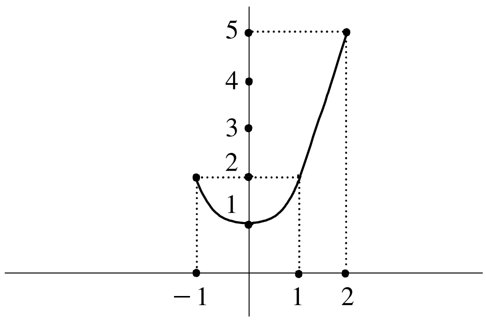


En particular, si f es una función polinómica y en $x = a$ y $x = b$ toma signos distintos, el polinomio deberá tener una raíz real entre a y b.

Teorema 2. *(Teorema de Weierstrass)*

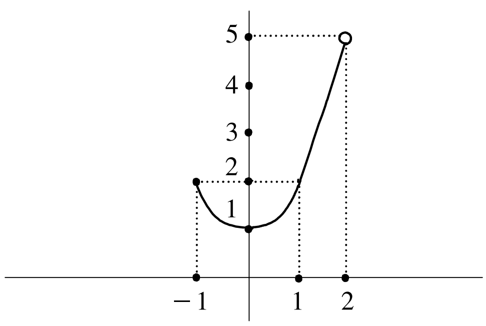
Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces existe al menos un punto $x_1 \in [a,b]$ en el que f alcanza su valor máximo y al menos un punto $x_2 \in [a,b]$ en el que f alcanza su valor mínimo.

Por ejemplo, sea $f(x) = x^2 + 1$ definida en $[-1,2]$.



Como f es continua en $[-1,2]$ alcanza su valor máximo en $x = 2, f(2) = 5$, y su valor mínimo se alcanza en $x = 0, f(0) = 1$.

Ahora bien, si consideramos que f está definida en $[-1,2)$

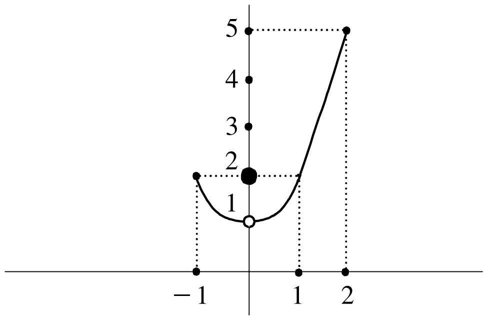


no se puede aplicar el teorema pues el intervalo no es cerrado aunque f es continua en él. Gráficamente se observa que no alcanza un valor máximo.

La hipótesis de continuidad también es crucial. En efecto, si

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad -1\le x\le 2, x\ne 0 \\ 2 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

se tiene que f no es continua en el intervalo y no alcanza el valor mínimo.



Ejemplo 14. Comprobar que los siguientes polinomios tienen alguna raíz real en los intervalos indicados.

1) $f(x)=x^3+2x-1$, en $[0,1]$ 2) $f(x)=-x^3+x^2-x+1$, en $[0,2]$

Solución:

1) $f(0)=-1<0, f(1)=2>0$, luego el polinomio tiene al menos una raíz real entre 0 y 1.

2) $f(0)=1>0, f(2)=-5<0$), luego el polinomio tiene al menos una raíz real entre 0 y 2.

Ejemplo 15. Comprobar que la ecuación $x^5-x^3+2x^2+1=20$ tiene al menos una solución real en el intervalo [0,2].

Solución:

Sea $f(x)=x^5-x^3+2x^2+1$ entonces $f(0)=1$ y $f(2)=33$. Por ser *f* continua en [0,2], *f* toma todos los valores entre 1 y 33 y, por tanto, existe $x\in[0,2]$ tal que $f(x)=20$, que es lo que se quería comprobar.

Ejercicios resueltos

1. $\lim_{x\to 1}\left(x^2-3x+2\right)$

Solución: $\lim_{x\to 1}\left(x^2-3x+2\right)=0$

2. $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

Solución: $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x^2+1}=\dfrac{-3}{2}$

3. $\lim_{x\to 3}(x+1)^{1/2}$

Solución: $\lim_{x\to 3}(x+1)^{1/2}=\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=\sqrt{4}=2$

4. $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

Solución: $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0$

5. $\lim_{x\to 3}f(x)$, siendo $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x\le 3\\ 2x-1 & \text{si } x>3\end{cases}$

Solución: $\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(x^2+1\right)=10\neq\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(2x-1)=5$, luego no existe el límite

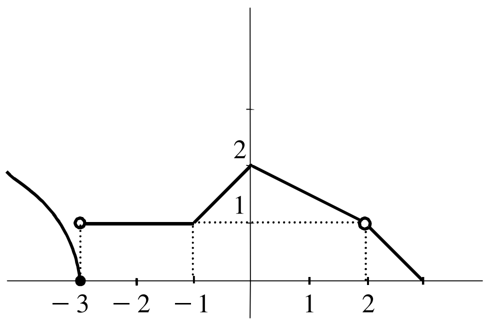
6. $\lim_{x\to 0} f(x)$, siendo $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si } x\le 0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

<u>Solución:</u> $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{x+1} = 0 \ne \lim_{x\to 0^+} (2x-1) = -1$, luego no existe el límite

7. $\lim_{x\to 1} f(x)$, siendo $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x\le 1 \\ 2x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

<u>Solución:</u> $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x-1) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1$

8. Calcular los límites, si existen, de la función cuya gráfica es la siguiente, en los puntos $x=-3$, $x=-1$ y $x=2$.



<u>Solución:</u> $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 0 \ne \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$, luego no existe límite en $x=-3$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 1$

9. $\lim_{x\to +\infty} (x^3 - x^2 + 1)$

<u>Solución:</u> $\lim_{x\to +\infty} (x^3 - x^2 + 1) = +\infty$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

<u>Solución:</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x+1} \dfrac{x+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = +\infty$

11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

<u>Solución:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x+3}{2x^2-1}$

<u>Solución:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x+3}{2x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{1}{x^2}} = 0$

13. $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{1}{x^2-4}$

<u>Solución:</u> $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{1}{x^2-4} = -\infty$

14. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{x^2-(a-1)x+a}{x^2-a^2}$ para los distintos valores de a .

<u>Solución:</u>

* Si $a \neq 0$; $\lim_{x\to a^+} \frac{x^2-(a-1)x+a}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a^+} \frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x+a)} = \lim_{x\to a^+} \frac{(x-1)}{(x+a)} = \frac{a-1}{2a}$

* Si $a = 0$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty$

15. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{x}$

Solución: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2+x-x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{x}\right)} = +\infty$

16. Calcular, cuando existan, las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3-x}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Solución:

a) Asíntota vertical $x = 1$ pues $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1; y = 1$ asíntota horizontal

No tiene asíntotas oblicuas.

b) $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

Asíntotas verticales $x = 0; x = 1; x = -1$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3-1} = 0; y = 0$ asíntota horizontal

No tiene asíntotas oblicuas.

c) Asíntota vertical $x = -1$

No tiene asíntotas horizontales

Asíntota oblicua $y = mx + b$

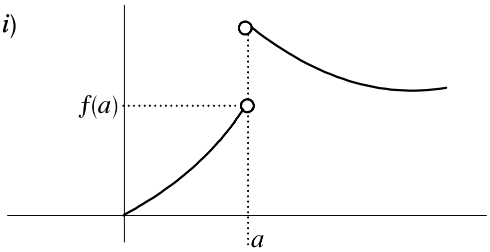
$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = -1$$

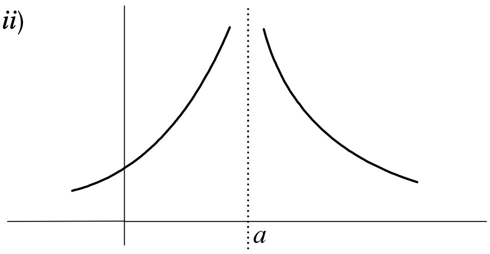
$$y = x - 1$$

17. Estudiar la continuidad en $x = a$ de las funciones cuyas gráficas son las siguientes:

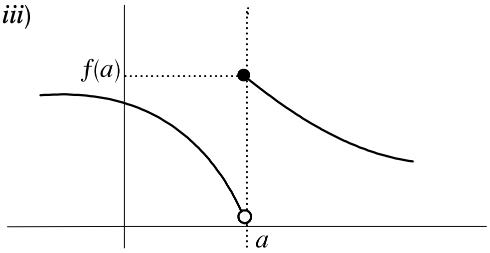
i)



ii)



iii)



Solución:

i) La función no tiene límite en $x = a$, por tanto es discontinua en ese punto

ii) No está definida en $x = a$, por tanto la función es discontinua en ese punto.

iii) Es también discontinua por el mismo razonamiento que en i).

18. Estudiar la continuidad de las funciones:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 0 \\ -x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x\le 2 \\ -x+6 & \text{si } x>0 \end{cases}$

Solución:

i) El dominio de la función *f* es $\mathbb{R}$.

En el intervalo $(-\infty,0)$ es continua ya que es una función polinómica.

En el intervalo $(0,+\infty)$ es continua ya que es una función polinómica.

En $x=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1 \Rightarrow$ no existe el límite en $x=0$, por tanto la función es discontinua en ese punto.

ii) El dominio de definición de la función *f* es $\mathbb{R}$.

En el intervalo $(-\infty,2)$ es continua ya que es una función polinómica.

En el intervalo $(2,+\infty)$ es continua ya que es una función polinómica.

En $x=2,\ \lim\limits_{x\to 2^+}(-x+6)=4,\ \lim\limits_{x\to 2^-}(3x-2)=4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}f(x)=4=f(2)$

La función es continua, también, en $x=2$. Es decir, f es continua en $\mathbb{R}$.

19. Calcular el valor de a para que sean continuas en $x=a$ las siguientes funciones:

i) $f(x)=\begin{cases} ax-1 & \text{si } x\le 1 \\ 3x^2+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} ax^2+4x-1 & \text{si } x\le 1 \\ -x+3 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Solución:

i) El dominio de definición de la función es $\mathbb{R}$, para todo valor de a.

En el intervalo $(-\infty,1)$ es continua para todo valor de a, ya que es una función polinómica.

En el intervalo $(1,+\infty)$ es continua para todo valor de a, ya que es una función polinómica.

En $x=1,\ \lim\limits_{x\to 1^+}(3x^2+1)=4,\ \lim\limits_{x\to 1^-}(ax-1)=a-1$.

Para que exista el límite en ese punto habrá de tenerse que $4=a-1 \Rightarrow a=5$.

Para $a=5, \lim\limits_{x\to 1}f(x)=4=f(1)$ y la función es continua.

Para $a\ne 5$ no existe el límite por lo tanto *f* es discontinua en $x=1$.

ii) El dominio de definición de la función es $\mathbb{R}$, para todo valor de a.

Como en el caso anterior, de haber alguna discontinuidad se podrá presentar únicamente en $x = 1$.

En $x = 1, \lim_{x\to 1^+}(-x+3) = 2, \lim_{x\to 1^-}(ax^2+4x-1) = a+3;\ \ a+3 = 2 \Rightarrow a = -1$;

Para $a = -1, \lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$ y la función es continua.

Para $a \neq -1$ no existe el límite por lo tanto *f* es discontinua en $x = 1$.

20. Estúdiese para que valores de x son continuas las siguientes funciones:

i) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ iii) $f(x) = e^{x^2+1}$ iv) $f(x) = \ln(x+1)$

Solución:

i) El dominio de definición de la función es $\mathbb{R} - \{2\}$. Es una función racional, por lo que es continua en su dominio de definición.

ii) Razonando de forma análoga al caso anterior, f está definida en $\{x \in \mathbb{R} |\ 1 - x > 0\}$, y será continua en ese dominio, es decir, en $(-\infty, 1)$.

iii) Es una función composición de una exponencial y un polinomio, y por tanto, continua en $\mathbb{R}$.

iv) El dominio de definición es $\{x \in \mathbb{R} |\ x + 1 > 0\}$,luego continua para $x > -1$

21. Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ a & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

$$f(1) = a; \lim_{x\to 1^+} a = a; \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 \Rightarrow a = 0$$

22. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 1 \le x < 2 \\ e^x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x \ne 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ iv) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x+1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

v) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \ln x & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

Solución:

i) Si $1 \le x < 2$, la función f es continua.

Si $x > 2$, la función f es continua.

Si $x = 2$, $f(2) = e^2$, $\lim\limits_{x \to 2^-} (\ln x) = \ln 2 \ne \lim\limits_{x \to 2^+} e^x = e^2 \Rightarrow f$ es discontinua en $x = 2$.

ii) Si $x \ne 1$, la función f es continua.

Si $x = 1$, $f(1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} e^{x-1} = 1 \Rightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$.

iii) Si $x \ne 0$, la función f es continua.

Si $x = 0$, $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe $\Rightarrow f$ es discontinua en $x = 1$.

iv) Si $x < 1$, la función f es continua.

Si $x > 1$, la función f es continua.

Si $x = 1$, $f(1) = 2$, $\lim\limits_{x \to 1^-} x = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x + 1) \ne f(1) \Rightarrow f$ es discontinua en $x = 1$.

v) Si $0 \le x < 1$, f es continua. Si $1 < x < 2$, f es continua.

Si $x = 1$, $f(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 2) = 0 = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x) = f(1) \Rightarrow f$ es continua en $[0,2]$.

Ejercicios propuestos

1. Dadas $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x^2-9}{3x^2+1}$, calcular

$$\lim(f+g), \lim(f-g), \lim(f\cdot g), \lim(f/g) \quad \text{cuando } x\to -\infty$$

2. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

3. Calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x^2-1}$

4. Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$

5. Dada $f(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } 0\le x<1 \\ 1 & \text{si } 1\le x\le 2\end{cases}$, calcular su límite en $x=0, x=1, x=3/2$

6. Sea $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 2 \\ 6-x^2 & \text{si } 1\le x\le 2\end{cases}$, calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

7. Calcular $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+2x}$

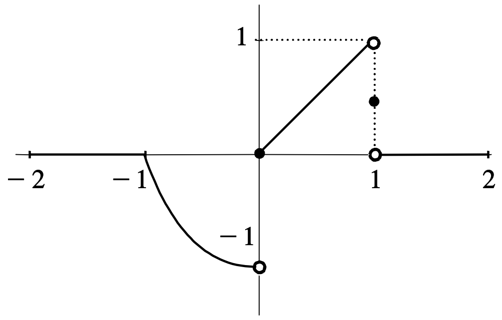
8. Calcular $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2}{x-5}$

9. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^3-x}$

10. Calcular $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+2}{x^3+2x^2+x+2}$

11. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-0}{x^2}$

12. Estudiar la continuidad de la función cuya gráfica es la siguiente:



13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

i) $f(x)=\begin{cases} e^x-1 & \text{si } x\le 0 \\ 2x^2+x & \text{si } x>0 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & -1\le x<0 \\ 2x & 0\le x\le 1 \\ 1 & x=1 \\ -2x+4 & 1<x<2 \\ 0 & 2<x\le 3 \end{cases}$

14. Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} |x-2|+3 & \text{si } x<0 \\ x+5 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

15. Calcular las asíntotas, si existen, de las siguientes funciones

i) $f(x)=\dfrac{x+2}{1-x}$ ii) $f(x)=x-\dfrac{3}{x^2}$

iii) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}$ iv) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$